Proprietà e ontologia delle definizioni.

Dio disse: “Sia la luce!”.
E la luce fu.
Dio vide che la luce era cosa buona
e separò la luce dalle tenebre
e chiamò la luce giorno e le tenebre notte.
E fu sera e fu mattina: primo giorno.
Dio disse: “Sia il firmamento in mezzo alle acque
per separare le acque dalle acque”.
Dio fece il firmamento
e separò le acque che sono sotto il firmamento
dalle acque che sono sopra il firmamento.
E così avvenne.
Dio chiamò il firmamento cielo.
E fu sera e fu mattina: secondo giorno.
[...]
Allora il Signore Dio plasmò dal suolo
ogni sorta di bestie selvatiche e tutti gli uccelli del cielo
e li condusse all’uomo, per vedere come li avrebbe chiamati:
in qualunque modo l’uomo avesse chiamato
ognuno degli esseri viventi,
quello doveva essere il suo nome.
Così l’uomo impose nomi a tutto il bestiame,
a tutti gli uccelli del cielo e a tutte le bestie selvatiche,
ma l’uomo non trovò un aiuto che gli fosse simile.

(Genesi 1,1-8; 2,19-20)

1. Qualche cenno alla storia

Il problema del definire compare con quello dell'argomentare (se non prima di esso) non appena si tenti di fondare (e in qualunque modo lo si faccia) la conoscenza. Nel ricordare alcuni momenti importanti della storia del pensiero filosofico che riguardano la definizione vorremmo, almeno per un attimo, spingerci molto indietro nel tempo, e guardare allo sfondo su cui nascerà, nei secoli successivi, la filosofia greca.

Ciò in cui ci imbattiamo sono testi letterari e frammenti (ad esempio i poemi omerici e le opere di Esiodo e dei poeti gnomici), che forniscono testimonianze, in particolare riguardo alla sfera religiosa, che ci permettono di avvicinarci all'interpretazione dell'esistenza umana data dai Greci. E tale interpretazione è intimamente legata alla conoscenza, una conoscenza non ancora filosofica, bensì connessa a riti misterici e al culto di divinità come Dioniso, Apollo, Demetra.

Pensiamo all'evento, celebrato annualmente alla fine dell'estate, ad Eleusi: il dio che ivi manifesta la propria potenza è Dioniso[1], il dio con il quale, scrive il Colli, "la vita appare come sapienza, pur restando vita fremente: ecco l'arcano. In Grecia un dio nasce da un'occhiata esaltante sulla vita, su un pezzo di vita, che si vuole fermare. E questo è già conoscenza. Ma Dioniso nasce da un'occhiata su tutta la vita: come si può guardare assieme tutta la vita? Questa è la tracotanza del conoscere: se si vive si è dentro a una certa vita, ma il voler essere dentro a tutta la vita assieme, ecco, questo suscita Dioniso, come dio onde sorge la sapienza. [...] La tracotanza del conoscere che si manifesta in questa avidità di gustare tutta la vita, e i suoi risultati, l'estremismo e la simultaneità dell'opposizione, alludono alla totalità, all'esperienza indicibile della totalità"[2]. È questa indicibilità ciò che colpisce anche nel finale dell'Inno a Demetra di Omero, il più antico tra i testi letterari a noi pervenuti sui misteri eleusini (fine del VII sec. a.C.):

"... e Demetra a tutti mostrò i riti misterici,
a Trittolemo e a Polisseno, e inoltre a Diocle,
i riti santi, che non si possono trasgredire né apprendere
né proferire: difatti una grande attonita atterrita reverenza per gli dèi impedisce la voce.

1 Cfr. [Colli 1977], pag. 29
2 [Colli 1977], pagg. 15 e 16

Felice colui - tra gli uomini viventi sulla terra - che ha visto queste cose:
chi invece non è stato iniziato ai riti sacri, chi non ha avuto questa sorte
non avrà mai un uguale destino, da morto, nelle umide tenebre marciscenti di laggiù"[3].

Colpisce la voce mozzata, la parola non pronunciata, il visto e non detto: ci sono cose la cui realtà è estranea alla parola e delle quali si ha solo una conoscenza estatico - visionaria. Questo non significa che si sia alla presenza di qualcosa di torbido e, dunque, incompatibile con la chiarezza e la misura greca: anche successivamente l'atto della conoscenza suprema è chiamato un "vedere" (si pensi all'uso che fa Platone di un terminologia eleusina per descrivere l'esperienza conoscitiva delle idee, e ancora a come Aristotele esplicitamente parla dell'iniziazione, quella folgorazione che subisce la capacità intuitiva)[4].

Ebbene, questa indicibilità ci rimanda ad un problema sostanziale per il nostro argomento: riusciremo a dire tutto, a definire tutto, o ci sarà sempre qualcosa che rimane al di là della nostra possibilità? E, sottolineiamo, non della nostra possibilità conoscitiva, bensì della nostra capacità di dire, di dare un nome alle cose, di organizzare il mondo attraverso la parola. L'esistenza di una estensione implica sempre che esista una comprensione e che possa trovarsi una intensione? La risposta data nell'Inno a Demetra, sebbene il problema sia posto in altri termini, è sicuramente no. E la stessa risposta dà Shakespeare, quando fa dire ad Amleto: "vi sono in cielo e in terra, Orazio, assai più cose di quante ne sogna la tua filosofia"[5].

Ma procediamo gradualmente. Torniamo in Grecia, anche se qualche secolo più tardi, e pensiamo a Socrate (470 - 399 a.C.). In molti dialoghi platonici egli continuamente martella i propri interlocutori con la domanda "che cos'è?", con la quale mette in moto la sua caratteristica procedura ironico - maieutica, iniziando con lo stabilire in modo univoco il significato delle cose che l'interlocutore presume di conoscere. Ad esempio, nel Menone, Socrate impone che, prima di discutere intorno alla virtù, si sappia che cosa sia la virtù; è necessario, cioè, definire che cosa sia la virtù in sé stessa, conoscere che cosa sia ciò che fa

3 Omero, Inno a Demetra 476 - 482 (trad. G. Colli)
4 Cfr. [Colli 1977], pagg. 28 e 29
5 William Shakespeare, Amleto, 1° atto, V scena, 166 - 167 (trad. E. Montale)

sì che ogni singolo uomo, donna, vecchio, fanciullo, schiavo, libero virtuoso sia, appunto, tale[6].

È vero che Socrate non stabilisce quale sia la struttura del concetto e della definizione[7], ma è pur vero che il suo atteggiamento rispetto al problema del definire non è indifferente e crea una base necessaria ed un notevole impulso per gli sviluppi successivi. "In termini moderni possiamo dire che egli - supponendo dato il concetto in *estensione* (cioè una classe o specie di oggetti) - cerca le note o proprietà caratteristiche, che valgono a determinarne la *comprensione*, che è per lui l'*essenza* della cosa da definire. In questo procedimento si può scorgere implicito il presupposto che ad ogni classe o specie, naturalmente data, risponda un'idea che ne esprima l'unità"[8].

Da questo "presupposto implicito" socratico muove poi Platone (428 - 347 a.C.) per affrontare il problema del rapporto tra il contenuto del concetto (al quale egli dà il nome di *idea*) e le cose particolari e sensibili. Innanzitutto Platone assume che le idee abbiano un'esistenza intelligibile e possiedano i connotati dell'immutabilità e dell'eternità, in opposizione alle cose particolari che hanno un'esistenza sensibile e si presentano come divenienti e mutevoli. Inoltre le idee sono legate tra loro in un ordine logico, procedente dal generale al particolare: questa sarà la base anche della teoria della definizione che Aristotele svilupperà, nella quale sarà dominante l'idea di ordine e di gerarchia tra i concetti.

Aristotele (384 - 322 a.C.) tratta nei Topici e negli Analitici Secondi il problema della definizione. Col termine ορισμοζ egli intende quell'insieme di note che, prese insieme, non si verificano se non riguardo alla cosa definita, manifestandone l'essenza; Aristotele raccomanda di raggruppare queste note in due sottodivisioni, delle quali la prima fornisce il genere in cui la cosa definita rientra e la seconda fornisce le differenze che la determinano dal resto degli appartenenti a quel genere[9].

Ma quali sono i termini che conosciamo per definizione? Le categorie, che dal punto di vista metafisico rappresentano le determinazioni fondamentali dell'essere, dal punto di vista logico sono (di conseguenza) i generi supremi, ai quali deve essere riportabile

6 Cfr. [Severino 1994], pag. 49
7 Cfr. [Reale - Antiseri 1983], pag. 71
8 [Enriques 1931], pag. 484
9 Cfr. [Dopp 1957], col. 1426

qualsiasi termine: esse dunque non hanno nessun concetto più universale del loro e quindi non sono definibili. Agli antipodi delle categorie troviamo gli individui particolari, dei quali è possibile solo la percezione: le differenze individuali non sono afferrabili dal nostro intelletto ed esprimibili in concetti e quindi essi non sono definibili. Tutti gli altri termini, che stanno tra l'universalità delle categorie e la particolarità degli individui, vengono conosciuti tramite definizione[10].

In epoca medioevale le definizioni vengono catalogate in diversi modi dalla filosofia scolastica[11].

Innanzitutto una definizione può essere *nominale* o *reale*; nel primo caso (*definitio quid nominis*) il definito è considerato solo come puro nome e la definizione si ottiene spiegando il vocabolo meno noto mediante uno più noto oppure chiarendone le radici etimologiche; nel secondo caso (*definitio quid rei*) il definito è considerato come essere di una cosa, significata dal nome e la definizione esprime, con concetto proprio e chiaro, ciò che la cosa è.

La definizione reale può essere:

(1) *estrinseca*, quando i principi di cui essa si avvale sono esterni alla cosa da definire, come quelli di efficienza e causalità (ad esempio: l'uomo è da Dio e per Dio);

(2) *intrinseca*, quando i principi di cui essa si avvale entrano nella costituzione della cosa da definire.

La definizione reale intrinseca può essere:

(2.1) *descrittiva*, quando spiega ciò che la cosa è non mediante i costitutivi della sua essenza, bensì mediante proprietà che da essi derivano direttamente (ad esempio: l'uomo è capace di ridere);

(2.2) *essenziale*, quando dice ciò che costituisce il definito nella sua essenza.

La definizione reale essenziale si distingue, poi, in

(2.2.1) *fisica*, quando esprime i costitutivi fisici dell'essenza di una cosa, come parti realmente distinte di cui essa è costituita (ad esempio: l'uomo è una sostanza che consta di corpo e di anima);

---

10 Cfr. [Reale - Antiseri 1983], pag. 157

11 Cfr. [Vanni Rovighi 1962], pag. 67 e [Sciamannini 1957]

(2.2.2) *metafisica*, quando esprime i costitutivi metafisici dell'essenza, come parti distinguibili solo per astrazione intellettiva, cioè il genere prossimo e la differenza specifica (ad esempio: l'uomo è animale razionale): *definitio fit per genus proximum et differentiam specificam*.

Ora, c'è una questione che non abbiamo ancora toccato, nonostante sia fondamentale e abbia interessato ogni epoca, anche se, come *nome*, costituisce un problema caratteristicamente medievale: quello del valore di esistenza dei concetti universali. La domanda che ci siamo posti rileggendo l'Inno a Demetra poteva essere: riusciremo a trovare un nome per ogni cosa? Qui la problematica si inverte: esiste qualcosa a cui dare un nome? O come chiedeva Berkeley: "vide mai un uomo altre cose oltre alle sue idee, sì da poterle comparare con queste e far queste simili a quelle?".

La nascita di questo problema filosofico viene solitamente fatta coincidere con l'interrogazione socratica di cui abbiamo detto: la domanda *che cosa è* mira a definire l'essenza universale comune ad un dato insieme di cose o azioni simili. Eppure, come avviene il passaggio da un (lungo e minuzioso) elenco di particolari alla formulazione del corrispondente concetto universale? La critica mossa dai cinici e da Platone a un puro procedimento astrattivo così formulato è più o meno la seguente: per ricavare l'universale dai particolari devo prima raggruppare questi in un insieme omogeneo, ma il criterio con cui stabilisco se un individuo fa parte o no della collezione che sto costruendo è legato al fatto che io riconosca in esso o meno ciò che tutti gli altri elementi hanno in comune, vale a dire la loro essenza universale La risposta data da Platone è chiara: c'è un mondo vero e originale, quello delle Idee, di cui il mondo sensibile è soltanto una copia, un'ombra proiettata contro il fondo di una caverna. Le idee sono entità, sostanze, sono ciò che il pensiero pensa quando si sia liberato dalle catene del mondo sensibile, sono l'essenza delle cose. Diversa è la posizione di Aristotele, che introduce i concetti di materia e forma, di potenza e atto: gli universali sussistono potenzialmente nelle cose sensibili e la nostra ragione li separa mediante l'astrazione; essi, dunque, sono enti di ragione, che in atto sussistono solo nella nostra mente e in potenza sussistono nelle cose come loro proprietà intrinseche. Il risorgere di questa questione filosofica nel medioevo fu occasionato da un passo dell'*Isagoge* di Porfirio, tradotto e commentato da Boezio. Non ci dilunghiamo sui vari dibattiti degli scolastici: ci limitiamo a richiamare la sistemazione fatta dalla Vanni Rovighi delle soluzioni proposte:

“1) *nominalismo* (Non ci sono concetti universali, noi conosciamo solo gli individui; gli universali sono puri nomi, *flatus vocis*);

2) *concettualismo* (Ci sono concetti universali, ma ad essi non corrisponde nessuna realtà, quindi i concetti universali sono privi di valore);

3) *realismo esagerato* (Ci sono concetti universali e ad essi corrispondono delle realtà che sono pure universali [...]);

4) *realismo moderato* o *concettualismo realistico* (Ci sono concetti universali ed hanno valore, sebbene la realtà sia fatta di individui, perché il significato dei concetti universali si realizza negli individui)”[12].

Il problema logico degli universali permane poi in tutta la filosofia moderna, anche se sotto altri nomi. E permane tutt’oggi ad un livello determinante, anche rispetto al nostro argomento.

Abbiamo caratterizzato il problema appena affrontato con l’aggettivo (più o meno appropriato) ‘logico’ per sottolineare il fatto che questa non è l’unica problematica che si riscontra quando si voglia fare un discorso completo sugli universali: ci sono anche il problema psicologico di come gli universali sorgano nella nostra mente e il problema metafisico di come sia costituita la realtà affinché essi abbiano valore. Non ci addentriamo negli affascinanti meandri di questa che è, probabilmente, la più entusiasmante di tutte le avventure del pensiero umano, e che non può trovare in questo spazio una degna sistemazione.

Ritorniamo al nostro percorso storico; secondo Federigo Enriques uno dei primi passi dell’epoca moderna è stato quello di “dar maggior rilievo alle definizioni nominali, mettendo in evidenza il loro carattere arbitrario (salvo l’uso e la coerenza delle convenzioni): si comprende l’importanza che assumono nelle matematiche e quindi, a poco a poco, si viene a scoprire il loro significato”[13]. La distinzione, mantenuta ancora da Leibniz, tra definizioni nominali (quelle che danno le caratteristiche del definiendum, così da permettere di distinguerlo da ogni altro oggetto) e definizioni reali (quelle che

[12] [Vanni Rovighi 1962], pag. 134
[13] [Enriques 1931], pag. 484

manifestano anche la possibilità, o realtà logica, del definiendum) alla fine scompare: queste ultime non sono altro che semplici definizioni (nominali) cui è aggiunto un giudizio in più, che postula, o dimostra, l'esistenza della cosa.

Un altro passo fondamentale a cui non possiamo non accennare è quello che porta alla concezione degli assiomi di una teoria matematica come definizioni implicite dei concetti primitivi. "Se la definizione ha valore puramente nominale, esprimendo un procedimento di riduzione essenzialmente relativo, essa deve far capo - in qualunque ordinamento di una teoria deduttiva - a concetti primitivi non definiti. Il significato di questi, in un assetto perfettamente logico della teoria, non si può desumere da una qualsiasi realità e nemmeno da una supposta *evidenza intuitiva* [...]. Ma converrà ritenere che di essi si dia una vera definizione implicita per mezzo delle proposizioni primitive, assiomi o postulati, su cui la teoria stessa viene fondata"[14].

[14] [Enriques 1931], pag. 484. Per seguire lo sviluppo storico della questione, si veda [Borga 1981]

2. La definizione di definizione

2.1. Come si formalizza il concetto di definizione in ambito logico

Molto altro si potrebbe dire sulla storia del concetto di definizione e sul pensiero filosofico ad esso riferibile, ma preferiamo sospendere questa carrellata di idee per presentare i tratti dell'analisi che di tale concetto ha operato la scuola filosofica polacca, in particolar modo Lésniewski e Tarski, incentrando il concetto di definizione in ambito logico.
Richiamiamo di seguito alcune nozioni riguardanti la grammatica e la sintassi del calcolo dei predicati del primo ordine; è in tale contesto infatti che cercheremo di formalizzare le condizioni cui devono soddisfare determinate formule per essere ritenute delle buone definizioni.

DEFINIZIONE:

Si dice *alfabeto di un linguaggio del primo ordine* l'insieme A suddiviso in due sottinsiemi disgiunti: la *parte fissa* e la *parte variabile*. La parte fissa è costituita dall'insieme dei *connettivi* $\{\neg\} \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, dall'insieme dei *quantificatori* $\{\forall, \exists\}$, dall'insieme che ha come unico elemento il simbolo (predicato) binario di *eguaglianza* $\{=\}$ e dall'insieme dei *simboli ausiliari*, le parentesi e la virgola $\{(,), ,\}$. La parte mobile è costituita da un insieme L disgiunto dalla parte fissa, tale che $L = C \cup F \cup P$, in cui C è l'insieme delle *costanti individuali*, $F = \bigcup_{n\in N} F_n$ è l'insieme dei *simboli funzionali*, $P= \bigcup_{n\in N} P_n$ è l'insieme dei *predicati*, tali che $C \cap F = \emptyset$, $C \cap P = \emptyset$, $F \cap P = \emptyset$; inoltre se $n, m \in \mathbb{N}^*$ con $n\neq m$ si ha $F_n \cap F_m = \emptyset$ e $P_n \cap P_m = \emptyset$. Gli elementi di F_n con $n\in \mathbb{N}^*$ vengono detti *simboli funzionali n-ari,* o *di arietà n,* mentre gli elementi di P_s con $s\in \mathbb{N}^*$ vengono detti *predicati s-ari,* o *di arietà s*.
In pratica si confonde poi il linguaggio con il relativo alfabeto, in particolare con la sua parte variabile (visto che quella fissa è comune ad ogni alfabeto); così con L indicheremo detto liguaggio.

DEFINIZIONE:

Sia L un linguaggio del primo ordine e sia X un insieme non vuoto disgiunto da L. Si definisce l'insieme T(X), i cui elementi sono detti *termini*, mediante le clausole seguenti;

contemporaneamente si definiscono l'*altezza* del termine e l'*insieme delle indeterminate libere*:

(1) per ogni $c \in C$: $c \in T(X)$, $\mathrm{alt}\,(c) = 0$, $\mathrm{lib}\,(c) = \varnothing$;

(2) per ogni $x \in X$: $x \in T(X)$, $\mathrm{alt}\,(x) = 0$, $\mathrm{lib}\,(x) = \{x\}$;

(3) per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, per ogni $F \in F_n$, per ogni $t_1, \ldots, t_n \in T(X)$: $F(t_1, \ldots, t_n) \in T(X)$,

$$\mathrm{alt}\,(F(t_1, \ldots, t_n)) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{alt}\,(t_k), \qquad \mathrm{lib}\,(F(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{1 \le k \le n} \mathrm{lib}\,(t_k);$$

(4) nient'altro.

Definizione:

Siano L un linguaggio del primo ordine, X un insieme di indeterminate; si definisce l'insieme $L(X)$ delle *formule* mediante le clausole seguenti; contemporaneamente si indicano l'*altezza*, l'*insieme delle indeterminate libere* e l'*insieme delle sottoformule*:

(1) per ogni $t_1, t_2 \in T(X)$: $t_1 = t_2 \in L(X)$, $\mathrm{alt}\,(t_1 = t_2) = 0$,

$\mathrm{lib}\,(t_1 = t_2) = \mathrm{lib}\,(t_1) \cup \mathrm{lib}\,(t_2)$ e $\mathrm{sub}\,(t_1 = t_2) = \{t_1 = t_2\}$;

(2) per ogni $k \in \mathbb{N}^*$, per ogni $t_1, \ldots, t_k \in T(X)$, per ogni $P \in P_k$:

$P(t_1, \ldots, t_k) \in L(X)$, $\mathrm{alt}\,(P(t_1, \ldots, t_k)) = 0$, $\mathrm{lib}\,(P(t_1, \ldots, t_k)) = \mathrm{lib}\,(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{lib}\,(t_k)$

e $\mathrm{sub}\,(P(t_1, \ldots, t_k)) = \{P(t_1, \ldots, t_k)\}$;

(3) se $\varphi \in L(X)$, allora

$\neg(\varphi) \in L(X)$, $\mathrm{alt}\,(\neg(\varphi)) = \mathrm{alt}\,(\varphi) + 1$, $\mathrm{lib}\,(\neg(\varphi)) = \mathrm{lib}\,(\varphi)$

e $\mathrm{sub}\,(\neg(\varphi)) = \{\neg\varphi\} \cup \mathrm{sub}\,(\varphi)$;

(4) se $\varphi, \psi \in L(X)$, allora $(\varphi) \otimes (\psi) \in L(X)$, $\mathrm{alt}\,((\varphi) \otimes (\psi)) = \mathrm{alt}\,(\varphi) + \mathrm{alt}\,(\psi) + 1$,

$\mathrm{lib}\,((\varphi) \otimes (\psi)) = \mathrm{lib}\,(\varphi) \cup \mathrm{lib}\,(\psi)$ e

$\mathrm{sub}\,((\varphi) \otimes (\psi)) = \{(\varphi) \otimes (\psi)\} \cup \mathrm{sub}\,(\varphi) \cup \mathrm{sub}\,(\psi)$, per $\otimes \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;

(5) per ogni $x \in X$, se $\varphi \in L(X)$, allora $Qx(\varphi) \in L(X)$, $\mathrm{alt}\,(Qx(\varphi)) = \mathrm{alt}\,(\varphi) + 1$,

$\mathrm{lib}\,(Qx(\varphi)) = \mathrm{lib}\,(\varphi) - \{x\}$ e $\mathrm{sub}\,(Qx(\varphi)) = \{Qx(\varphi)\} \cup \mathrm{sub}\,(\varphi)$,

ove $Q \in \{\forall, \exists\}$;

(6) nient'altro.

Definizione:

Una formula $\varphi \in L(X)$ si dice *enunciato* se è tale che $\mathrm{lib}\,(\varphi) = \varnothing$. Un insieme $\Gamma \subseteq L(X)$ di enunciati si dice una *teoria* di L.

DEFINIZIONE:

Siano dati le indeterminate distinte $y_1, \ldots, y_n \in X$ e i termini $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T(X)$. Si definisce *sostituzione simultanea* di τ_1 al posto di $y_1, \ldots, \tau_n$ al posto di y_n la funzione

$$(\vec{\tau} \backslash \vec{y}) : L(X) \longrightarrow L(X)$$

ponendo:

(1) per ogni $t_1, t_2 \in T(X)$: $(\vec{\tau} \backslash \vec{y})\ (t_1 = t_2) = (\vec{\tau} \backslash \vec{y})\ (t_1) = (\vec{\tau} \backslash \vec{y})\ (t_2)$;

(2) per ogni $k \in \mathbb{N}^*$, per ogni $t_1, \ldots, t_k \in T(X)$, per ogni $P \in P_k$:

$$(\vec{\tau} \backslash \vec{y})\ (P(t_1, \ldots, t_k)) = P((\vec{\tau} \backslash \vec{y})\ (t_1), \ldots, (\vec{\tau} \backslash \vec{y})\ (t_k));$$

(3) $(\vec{\tau} \backslash \vec{y})\ (\neg(\varphi)) = \neg((\vec{\tau} \backslash \vec{y})\ (\varphi))$;

(4) se $\otimes \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, allora

$$(\vec{\tau} \backslash \vec{y})\ ((\varphi) \otimes (\psi)) = ((\vec{\tau} \backslash \vec{y})\ (\varphi)) \otimes ((\vec{\tau} \backslash \vec{y})\ (\psi));$$

(5) sia $Q \in \{\forall, \exists\}$; per ogni $x \in X - \{y_1, \ldots, y_n\}$ si ha $(\vec{\tau} \backslash \vec{y})\ (Qx(\varphi)) = Qx((\vec{\tau} \backslash \vec{y})\ (\varphi))$.

Per ogni indice r tale che $1 \leq r \leq n$ si ha

$(\vec{\tau} \backslash \vec{y})\ (Qy_r(\varphi)) = Qy_r\ ((\tau_1 \backslash y_1, \ldots, \tau_{r-1} \backslash y_{r-1}, \tau_{r+1} \backslash y_{r+1}, \ldots, \tau_n \backslash y_n)(\varphi))$.

DEFINIZIONE:

Sia $\varphi \in L(X)$. Se esiste $\psi \in \text{sub}(\varphi)$ tale che $x \in \text{lib}(\psi)$ si dice che x *ha presenze in* φ. Se $x \in \text{lib}(\varphi)$ si dice che x *ha presenze libere in* φ. Se x ha presenze in φ, ma $x \notin \text{lib}(\varphi)$, si dice che x *ha presenze vincolate in* φ.

DEFINIZIONE:

Siano $t \in T(X)$, $x \in X$ e $\varphi \in L(X)$. Si dice che t è *libero per* x *in* φ e si scrive $\text{lib}(t, x, \varphi)$, se non esiste una formula del tipo $Qy(\psi) \in \text{sub}(\varphi)$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, tale che $x \in \text{lib}(Qy(\psi))$ e $y \in \text{lib}(t)$.

DEFINIZIONE:

Data una formula φ tale che $\text{lib}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_s\}$, la formula $\forall x_1, \ldots, x_s\ (\varphi)$ è un enunciato che viene detto (*una*) *chiusura universale di* φ.

DEFINIZIONE:

Il *sistema minimale* di derivazione del calcolo dei predicati con identità si ottiene aggiungendo al sistema minimale per il calcolo delle proposizioni le regole di introduzione ed eliminazione dei quantificatori e le regole dell'identità.

Dunque esso è costituito dalle seguenti regole:

(i.∧) $\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}$;

(e.∧) $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$; $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$;

(i.∨) $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$; $\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$;

(e.∨) $\dfrac{\varphi \vee \psi \quad \begin{matrix}[\varphi] & [\psi] \\ \vartheta & \vartheta\end{matrix}}{\vartheta}$;

(i.→) $\dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}$;

(e.→) $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$;

(i.↔) $\dfrac{\begin{matrix}[\varphi] & [\psi] \\ \psi & \varphi\end{matrix}}{\varphi \leftrightarrow \psi}$; $\dfrac{\begin{matrix}[\varphi] & [\psi] \\ \psi & \varphi\end{matrix}}{\psi \leftrightarrow \varphi}$;

(e.↔) $\dfrac{\varphi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi}$; $\dfrac{\psi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi}$;

(i.∀) $\dfrac{(z \backslash x)(\varphi)}{\forall x(\varphi)}$ purché z non abbia presenze in ∀x(φ) e x non compaia libera nelle assunzioni non scaricate dalle quali si deriva φ;

(e.∀) $\dfrac{\forall x(\varphi)}{(t \backslash x)(\varphi)}$ purché lib (t, x, φ);

(i.∃) $\dfrac{(t \backslash x)(\varphi)}{\exists x(\varphi)}$ purché lib (t, x, φ);

(e.∃) $\dfrac{\exists x(\varphi) \quad \begin{matrix}[(z \backslash x)(\varphi)] \\ \psi\end{matrix}}{\psi}$ purché z non abbia presenze in ∃x(φ) e x non compaia libera nelle assunzioni non scaricate dalle quali si deriva ψ;

(r.) $\dfrac{}{x = x}$;

(s.) $\dfrac{x = y}{y = x}$;

(t.) $\dfrac{x = y \quad y = z}{x = z}$;

(sost.) $\dfrac{x = y \quad (x \backslash y)((y \backslash z)(\varphi))}{(y \backslash z)(\varphi)}$ purché lib (x, y, (y\z)(φ)) e lib (y, z, φ).

DEFINIZIONE:

Le *derivazioni* sono rappresentate in forma di albero finito, in cui i nodi sono le occorrenze delle formule. Le formule che costituiscono i nodi iniziali (le foglie) dell'albero sono le *assunzioni* o *ipotesi* da cui parte la derivazione, mentre gli altri nodi dell'albero sono ottenuti dai precedenti mediante una delle regole di inferenza introdotte sopra. Il nodo finale (la radice) dell'albero è la *conclusione* della derivazione e dipende dalle assunzioni non scaricate (sono scaricate quelle racchiuse tra parentesi quadre).

DEFINIZIONE:

Sia $\Gamma \subseteq L(X)$ una teoria. La presenza di una derivazione della formula φ le cui assunzioni non scaricate siano elementi di Γ si indica con la scrittura $\Gamma \vdash \varphi$; in tal caso φ si dice anche formula *deducibile da* Γ. Il caso che la formula φ non sia deducibile da Γ, si indica col simbolo $\Gamma \nvdash \varphi$. Se $\Gamma = \emptyset$, si scrive $\vdash \varphi$ e si dice che φ è un *teorema logico*. Se φ non è un teorema logico si scrive $\nvdash \varphi$.

Una teoria formalizzata delle definizioni può essere introdotta in questo contesto (in realtà non ha importanza che L sia un linguaggio del primo ordine o di ordine superiore).

Sia dunque Γ una teoria espressa in un linguaggio L, cioè un insieme di enunciati di $L(X)$. Sia s un simbolo non appartenente al linguaggio L. Se L è un linguaggio del primo ordine, s potrebbe essere una costante individuale, oppure un simbolo funzionale, oppure un predicato, ma ciò che andiamo dicendo si può applicare a tutti i casi. Sia L' il linguaggio ottenuto aggiungendo a L il nuovo simbolo s e sia φ una formula di $L'(X)$ contenente il nuovo simbolo. Dato che $L \subseteq L'$ si ha anche $L(X) \subseteq L'(X)$. Sia Γ' la teoria (espressa nel linguaggio L') che ha per elementi quelli di Γ e la formula φ. Affinchè φ possa essere considerata una definizione di s rispetto alla teoria Γ, si devono verificare le due seguenti condizioni:

- per ogni formula ψ di $L'(X)$ - $L(X)$ esiste una formula θ di $L(X)$ tale che $\Gamma' \vdash' \forall(\psi \leftrightarrow \theta)$ avendo indicato con il simbolo $\vdash'$ che nella derivazione sono ammesse anche formule di $L'(X)$ e col quantificatore universale una (la) chiusura universale della formula in parentesi;
- per ogni formula λ di $L(X)$ se $\Gamma' \vdash' \lambda$, allora $\Gamma \vdash \lambda$ con una derivazione in cui sono presenti solo formule di $L(X)$.

La teoria Γ' così ottenuta si dice *estensione per definizione* della teoria Γ.

Il primo dei due requisiti sopra esposti è detto di *eliminabilità*.

Esso impone che ogni formula contenente il nuovo simbolo sia, riguardo alla propria dimostrabilità, equivalente ad una formula in cui esso non compare; in questo modo risulta consentita l'eliminazione del definiendum (il nuovo simbolo *s*) in ogni contesto in cui esso sia presente.

"È grazie a questo principio che possiamo dire che le definizioni - benché utili ed anzi spesso indispensabili in *pratica*, per rendere maneggevole la nostra notazione - non sono mai necessarie in linea di *principio*. Tutto ciò che può essere detto con l'aiuto di una definizione che soddisfi il requisito di eliminabilità può essere detto senza ricorrere ad essa; qualsiasi cosa possa essere detta ricorrendo sia alla terminologia primitiva che a quella definita può essere detta ricorrendo solo alla terminologia primitiva. Se una definizione non soddisfacesse questo requisito, si potrebbe dire che ciò che viene così introdotto non è un termine definito, ma un nuovo termine primitivo e che essa non è affatto una definizione."[15]

Il secondo requisito è detto di *non creatività*.

Esso impone che non si possano dimostrare utilizzando il definiendum formule che non siano già dimostrabili senza di esso.

"Una definizione non deve far aumentare nella teoria il numero delle asserzioni che sono espresse con una notazione che non contenga il definiendum. Se una definizione facesse ciò, sarebbe in effetti un assioma con potere creativo. [...] L'aggiunta di definizioni che soddisfano questo requisito non può dar luogo a contraddizioni nella teoria che ne risulta, a meno che tali contraddizioni siano già presenti nella teoria originale: infatti se la teoria ottenuta fosse contraddittoria, allora in essa *ogni* formula sarebbe dimostrabile come teorema [in particolare ogni formula di L(X)] e ciò costituirebbe un ovvio incremento del numero dei teoremi nella notazione primitiva, a meno che la teoria originale fosse già contraddittoria"[16].

La richiesta iniziale che il simbolo *s* non appartenga a L equivale a chiedere che si abbia un *procedere genetico*: il simbolo *s* che si vuole definire non è mai stato usato nella teoria Γ, perché non fa parte del linguaggio in cui essa è espressa. In questo modo vengono evitati i circoli viziosi.

Inoltre è da notare che la definizione del nuovo simbolo *s* è data in riferimento ad una teoria Γ. Come prima conseguenza di questo fatto si ha che una stessa formula può essere

[15] [Rogers 1971] pag. 96
[16] [Rogers 1971] pagg. 96 - 97

ritenuta una definizione rispetto ad una teoria e non rispetto ad un'altra; ma ancora, in questo modo si capisce come il referente per decidere quali siano gli enti primitivi non sia più l'ovvietà o l'evidenza: la nozione di definizione dipende da una teoria, vale a dire un insieme qualunque di formule (o enunciati).

2.2. Come si definiscono i predicati, i simboli funzionali e le costanti

Vediamo ora di formulare delle regole che ci permettano di costruire definizioni che soddisfino i requisiti di eliminabilità e creatività; è necessario, se ci limitiamo alla logica del primo ordine, trattre separatamente i casi dei predicati, dei simboli funzionali e delle costanti.

REGOLA DI DEFINIZIONE DI UN PREDICATO

Per definire un predicato n-ario P, la formula φ da aggiungere alla teoria Γ è data da

$$\forall x_1, ..., x_n (P(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \theta),$$

ove $x_1, ..., x_n$ sono indeterminate distinte e la formula θ è una formula di $L(X)$ in cui sono libere, al più, solo le indeterminate $x_1, ..., x_n$.

REGOLA DI DEFINIZIONE DI UN SIMBOLO FUNZIONALE

Per definire un simbolo funzionale n-ario F si può procedere in due modi diversi.

Nel primo modo la formula φ da aggiungere alla teoria Γ è data da

$$\forall x_1, ..., x_n, y ((F(x_1, ..., x_n) = y) \leftrightarrow (\theta)),$$

ove $x_1, ..., x_n$, y sono indeterminate distinte e la formula θ è una formula di $L(X)$ in cui sono libere, al più, solo le indeterminate $x_1, ..., x_n$, y e che deve garantire l'unicità, nel senso che deve essere

$$\Gamma \vdash \forall x_1, ..., x_n \exists y \forall z (z=y \leftrightarrow \theta)$$

con z indeterminata diversa dalle altre e derivazione in cui non compare il simbolo F.

Secondo quest'ultima richiesta per ogni n-upla di indeterminate $x_1, ..., x_n$, la condizione definitoria θ è soddisfatta esattamente da un valore di y, né più né meno; se tale condizione non è dimostrabile in Γ, allora il requisito di non creatività non sarà più soddisfatto.

Il secondo modo di definire un simbolo funzionale richiede l'introduzione di un termine $t \in T(X)$; in tal caso la formula φ da aggiungere alla teoria Γ è data da

$$\forall x_1, ..., x_n\ (F(x_1, ..., x_n) = t)$$

purché lib (t) $\subseteq \{x_1, ..., x_n\}$ e dove $x_1, ..., x_n$ sono indeterminate distinte. In questo caso la garanzia di unicità sarebbe espressa dalla condizione

$$\Gamma \vdash \forall x_1, ..., x_n\ \exists y\ \forall z\ (z=y \leftrightarrow z=t).$$

Questa derivazione, tuttavia, è automaticamente assicurata dal fatto che la formula

$$\forall x_1, ..., x_n\ \exists y\ \forall z\ (z=y \leftrightarrow z=t)$$

è un teorema della logica dell'identità.

Regola di Definizione di una Costante Individuale

Anche per definire una costante individuale c si può procedere in due modi diversi.

Nel primo modo la formula φ da aggiungere alla teoria Γ è data da $\forall y\ (c=y \leftrightarrow \theta)$

ove lib $(\theta) \subseteq \{y\}$ e $\theta \in L(X)$. In questo caso bisogna richiedere la garanzia di unicità, che viene espressa dalla condizione

$$\Gamma \vdash \exists y\ \forall z\ (z=y \leftrightarrow \theta)$$

ove z è indeterminata diversa da y e derivazione in cui sono presenti solo formule di $L(X)$.

Il secondo modo di definire una costante individuale richiede l'introduzione di un termine $t \in T(X)$ tale che lib (t) = $\emptyset$; in tal caso la formula φ da aggiungere alla teoria Γ è data da $c = t$.

In questo caso la condizione di unicità è ancora automaticamente assicurata.

Sia nel caso dei simboli funzionali che in quello delle costanti individuali il secondo modo è sicuramente il più comodo da usare; in alcune circostanze però non si è in grado di definire un simbolo funzionale o una costante individuale tramite un'identità, per esempio quando la teoria di partenza Γ non contiene alcun simbolo funzionale o, rispettivamente, alcuna costante individuale.

2.3. Alcuni esempi

Consideriamo ora alcuni esempi e controesempi molto esplicativi.

- Il primo esempio che vediamo ci serve per capire come una stessa formula può essere ritenuta una definizione rispetto ad una teoria e non rispetto ad un'altra. Consideriamo infatti come si definisce la relazione d'ordine stretto nei numeri naturali utilizzando l'addizione; la formula che si dà è la seguente:

$$n < m \leftrightarrow \exists\, p\, (p \neq 0 \;\wedge\; m = n + p).$$

Essa definisce il consueto ordinamento nella teoria dei numeri naturali, ma non in quella dei numeri interi.

- Vediamo ora un esempio in cui il requisito di non creatività non è soddisfatto. Consideriamo il linguaggio con un solo predicato binario (che scriveremo con la notazione infissa), indicato dal simbolo "$\angle$". Come teoria Γ consideriamo quella data dagli assiomi di un ordine stretto totale; vogliamo estendere tale teoria per definizione del simbolo di operazione "$\circledcirc$"; prendiamo come 'definizione' la formula $\forall x, y, z\ (x \circledcirc y = z \leftrightarrow x\angle z \wedge y\angle z)$. Consideriamo il modello di Γ costituito dai numeri naturali dotati della relazione <; si ha che $3<7 \wedge 5<7$, da cui $3 \circledcirc 5 = 7$, e pure $3<8 \wedge 5<8$, da cui $3 \circledcirc 5 = 8$; dovrebbe allora essere $7 = 8$, mentre sppiamo che $7 \neq 8$. Allora la teoria Γ' ottenuta aggiungendo alla Γ la formula φ è contraddittoria: di conseguenza ogni formula di Γ' sarebbe un teorema di Γ'; in particolare in Γ' si potrebbero dimostrare anche tutte le formule di L(X) che non sono teoremi in Γ; pertanto la 'definizione' data del simbolo $\circledcirc$ è creativa.
- Un esempio di definizione di un simbolo funzionale unario data bene (cioè che soddisfa i requisiti di eliminabilità e di non creatività) è quella di logaritmo.

Infatti il logaritmo in base a (con $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) di un numero b (con $b \in \mathbb{R}^+$) è definito dalla seguente formula:

$$\log_a b = c \quad \text{se e solo se} \quad a^c = b.$$

I due requisiti sono soddisfatti a causa dell'esistenza e dell'unicità del numero reale c tale che (dati a e b che soddisfano le condizioni richieste) si abbia $a^c = b$. È chiaro che la dimostrazione di esistenza ed unicità di un numero reale c che soddisfa tale formula non è contenuta nella definizione stessa: il fatto che tale dimostrazione venga omessa potrebbe essere uno dei motivi delle difficoltà di apprendimento del concetto di logaritmo.

- In una teoria algebrica si possono introdurre i simboli per l'elemento neutro della moltiplicazione e della addizione tramite delle doppie implicazioni:

$$\forall x\, (x = 0 \;\leftrightarrow\; \forall\, y\, (y + x = y))$$

$$\forall x\ (x = 1 \leftrightarrow \forall\ y\ (y \cdot x = y)).$$

Se poi consideriamo una teoria algebrica dotata della costante individuale 1, allora si può introdurre la costante individuale 2 mediante l’uso di una doppia implicazione

$$\forall x\ (2 = x \leftrightarrow x = 1+1),$$

oppure mediante l’uso dell’identità

$$2 = 1+1.$$

3. Problemi ontologici ed epistemologici

Ci pare importante a questo punto soffermarci un attimo su alcune questioni di carattere ontologico ed epistemologico, che derivano da una riflessione sui requisiti imposti dalla nostra teoria della definizione.

3.1. Eliminabilità e non creatività

Non c'è dubbio che dal punto di vista logico le definizioni debbano essere eliminabili e non creative. Ma da questo stesso punto di vista non sono forse anche tutti i teoremi non creativi ed eliminabili? La creatività è riservata agli assiomi e la non eliminabilità agli assiomi indipendenti.

Se si guarda al problema sotto un'angolazione diversa, le cose cambiano notevolmente. È chiaro infatti che i teoremi di una teoria danno alla conoscenza un contributo e che tale contributo è insostituibile. Questo fatto, anche se forse non con la medesima evidenza, continua a valere anche quando si tratta delle definizioni.

In entrambi i casi (teoremi e definizioni) esiste un problema di tempo, carta, energia e memoria: se ne spenderebbero troppi se, per dimostrare un qualsiasi teorema, si dovesse sempre partire dagli assiomi e dai termini primitivi! Accade così che teoremi e definizioni sono strumenti utili per realizzare una sorta di economia di pensiero.

Ma ci sono problemi anche d'altro genere, forse più profondo. Uno dei motivi per cui le definizioni possono essere considerate non eliminabili è legato all'abitudine consolidata di ritenere importanti solo le cose che hanno un nome, o quantomeno ritenerle più importanti delle altre. È tipico l'esempio degli studenti che, per prepararsi ad un esame, studiano solo i "teoremi col nome", quasi certi che gli altri non verranno mai chiesti durante l'interrogazione! Il dare una definizione, allora, cioè il sostituire una lunga sequenza di simboli noti con un'altra sequenza (in genere più breve) di simboli non introdotti prima, costituisce un buon modo per comunicare allo studente che sta avendo a che fare con qualcosa che merita la sua attenzione. È come quando ci si prepara ad un viaggio guardando una cartina geografica del luogo che si ha intenzione di visitare: è tra i posti che hanno un nome che siamo portati a scegliere le tappe del nostro percorso e non tra gli infiniti punti che le coordinate geografiche ci permettono di individuare; il limitare in questo modo la nostra scelta è un atto di fiducia nella toponomastica e nel buonsenso della popolazione indigena che l'ha determinata. Così lo studente: spesso inconsapevolmente si fida del buonsenso di chi ha scelto di dare un nome a qualcosa piuttosto che qualcos'altro, ed è a quel qualcosa che guarda con accentuato interesse.

Di più: non è determinante solo la scelta di cosa definire, bensì anche quella del come definirlo. Il nome dato, se ben scelto, apre (per ciò che evoca, per analogia con altri nomi, o per la semplicità con cui ci permette di operare) possibilità di comprensione altrimenti sbarrate. Mettiamoci per un attimo nei panni dello studente, di colui che non deve dare delle definizioni, ma prendere atto di quelle che gli vengono presentate e facciamo l'esempio di come può venire introdotto l'integrale di convoluzione. Se diciamo: date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sia

a) $f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt$

b) $\mathrm{d}(f, g) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt$

è chiaro che con le definizioni a) e b) poniamo in evidenza due cose diverse; la prima porta lo studente a riflettere sulla dipendenza da x dell'integrale dato e sul fatto che si sta dando una operazione puntuale tra le due funzioni f e g, la seconda richiamerà alla mente le varie 'distanze' incontrate e porrà alla luce il problema di verificare di quali proprietà, tra quelle normalmente valide per le distanze, gode la funzione così introdotta. Se nessuna di queste proprietà fosse soddisfatta, la b) sarebbe, senz'ombra di dubbio, una cattiva definizione. Molti altri esempi potrebbero essere considerati (pensiamo a tutte le volte in cui determinati enti vengono chiamati punti...).

Le definizioni sono dunque utili e di conseguenza è meglio non eliminarle. Ma in un certo modo possono essere ritenute anche creative. Innanzitutto possiamo dire che, in alcuni casi, la sola intenzione di dare una definizione costringe ad una certa creatività, nel senso che rende necessaria una dimostrazione di esistenza ed unicità, sulla quale altrimenti si sarebbe tentati di sorvolare. Di più: abbiamo già detto che una buona definizione cattura l'attenzione dello studente e gli semplifica la comprensione di certe formule; anche per il ricercatore vale qualcosa di simile: una buona definizione può condurlo a lavorare nella giusta direzione e può semplificargli la vita sino al punto di portarlo a dimostrare formule che altrimenti non avrebbe neppure immaginato. Proviamo, infatti, a considerare l'atteggiamento di chi per primo decide di introdurre una definizione; da un lato saranno le proprietà che egli avrà dimostrato valere per un determinato oggetto matematico che gli suggeriranno il nome da dargli, dall'altro il nome scelto indicherà la via per la determinazione di ulteriori proprietà.

Concludendo: "Quando una definizione o una notazione sono ben scelte, esse rendono accessibili alla nostra intuizione intere aree del sapere matematico. [...] Le definizioni sono logicamente non creative ed eliminabili, ma il contributo che danno alla conoscenza è enorme ed insostituibile, sono dunque creative e non eliminabili"[17].

3.2. Matematica: invenzione o scoperta?

Quando si riflette sulle definizioni ci si imbatte in un problema che in realtà ha una portata molto più ampia: quello del valore ontologico degli enti matematici. Si tratta di rispondere alla questione della esistenza degli oggetti matematici: essi esistono di per sé (e quindi il matematico ha il compito di scoprirli) o esistono solo in virtù del fatto che c'è una mente che li pensa (e quindi il matematico li inventa)? È questo un aspetto che, in genere, ben poco si affronta nelle aule universitarie: dopo l'aspetto grammaticale e sintattico delle teorie che si esaminano è già tanto se ci si preoccupa di studiarne quello semantico; quello ontologico è riservato a chi proprio non ha niente di meglio da fare. Eppure la scelta dell'una o dell'altra opzione influisce pesantemente anche su questioni "tecniche", in particolar modo proprio per ciò che riguarda le definizioni.

Se la matematica si scopre, la definizione è soltanto una descrizione (per quanto un po' particolare, nel senso che deve determinare univocamente l'oggetto in questione) di un'entità che esiste di per sé e delle relazioni che tale entità ha con gli altri oggetti esistenti.

Se la matematica si inventa, la definizione è invece la prima chiamata all'esistenza di un nuovo oggetto, che risulta univocamente determinato dalle sue proprietà e dalle relazioni che esso ha con gli altri oggetti esistenti.

[17] [Marchini 1996]

Ma quali sono 'gli altri oggetti esistenti'? Nel primo caso sono tutte le entità matematiche che fanno parte della teoria, che siano già state definite o meno; nel secondo caso sono solo gli enti già definiti, perché niente esiste prima di essere definito. A questo punto è chiaro che il cosiddetto *procedimento genetico*, per il quale in una definizione intervengono soltanto termini definiti precedentemente e non quelli che verranno definiti successivamente, diventa necessario o meno a seconda della teoria ontologica che si abbraccia. Una definizione in cui intervengono enti che verranno definiti in seguito (anche se potrebbe essere causa di circoli viziosi) è da ritenersi accettabile se si crede che la matematica si scopre; se la matematica si inventa, invece, il procedere geneticamente è l'unica possibilità.

A prima vista questo problema potrebbe apparire banale: sembrerebbe, infatti, che in tutte le teorie matematiche, una volta scelti gli assiomi e i termini primitivi, le definizioni e i teoremi vengano introdotti geneticamente. Così non è: la matematica classica è piena di definizioni che, più o meno subdolamente, vengono inserite senza utilizzare il procedimento genetico. In genere ciò avviene quando si definiscono delle entità in termini di totalità che presuppongono quelle stesse entità, ossia quando si ha a che fare con le cosiddette *definizioni impredicative*[18]. Dice H. Poincaré: "Le definizioni impredicative sono definizioni mediante una relazione tra l'oggetto da definire e tutti gli oggetti di una certa specie della quale lo stesso oggetto da definire è supposto far parte (o almeno da alcuni oggetti che dipendono per la loro definizione dall'oggetto che deve essere definito)" [19]. Per capire che non si tratta di un problema di scarsa rilevanza, vediamo alcuni esempi di definizioni impredicative, che ricorrono in diversi rami della matematica.

- Consideriamo la definizione di elemento neutro di un gruppo (G, +): esso si definisce come l'elemento u di G tale che, per ogni elemento x di G, si abbia $u + x = x$. In tal modo per definire u devo conoscere tutti gli elementi di G, dunque anche u stesso.
- Supponiamo di voler definire l'insieme T di tutti gli insiemi: per costruirlo bisogna aver costruito tutti gli insiemi, dunque anche T, perché è esso stesso un insieme.
- Consideriamo la definizione di estremo superiore di un insieme di numeri reali: sia $A \subseteq \mathbb{R}$; si dice maggiorante di A un numero $a \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in A$ sia $x \leq a$; si dice

[18] Cfr. [Rogers 1971], pag. 136
[19] Citato in [Marchini 1996]

estremo superiore di A il più piccolo dei suoi maggioranti. In tal modo per definire l'estremo superiore s, devo conoscere l'insieme dei maggioranti, ovvero devo conoscere tutti i suoi elementi, ma tra essi c'è proprio lo stesso s.

Se la matematica si scopre, il ricorso alle definizioni impredicative è del tutto accettabile: la definizione serve solo ad identificare con un nome un concetto importante, già esistente di per sé, e il fatto che non si riesca a farlo senza ricorrere ad una formula impredicativa dipende solo dalla incapacità umana di trovare una definizione diversa.

Ma se la matematica si inventa, le definizioni impredicative portano ad un circolo vizioso non accettabile. Definire un'entità significa chiamarla all'esistenza: se per farlo devo aver già definito una totalità di cui essa fa parte, significa che devo aver già chiamato all'esistenza tutti gli elementi di tale totalità, tra cui la stessa entità da definire. Per capire la centralità del problema, torniamo alla definizione di estremo superiore: essa è fondamentale nella teoria dei numeri reali, in quanto l'assioma di continuità di $\mathbb{R}$ si può formulare asserendo che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore. Ora, i risultati tradizionalmente insegnati nelle scuole superiori sui numeri reali, su derivate ed integrali sono tutti (o quasi) basati sulla continuità, cioè su una definizione impredicativa, quindi sarebbero da scartare. In realtà vi sono delle ricostruzioni dell'Aritmetica e dell'Analisi in forma completamente predicativa, le quali mostrano quanto sia difficile evitare simili circoli viziosi, in agguato in vari contesti tradizionali. Vale la pena affrontare tale difficoltà? La risposta è positiva, se si pensa che il sistema formale di teoria degli insiemi proposto da Von Neumann, Bernays e Gödel, che assume come uno dei principi fondamentali l'astrazione limitata alle formule predicative, è finitamente assiomatizzabile (mentre quello proposto da Morse e Mostowski, che ammette l'astrazione anche sulle formule impredicative, non è finitamente assiomatizzabile). In tale ambito si riesce a ricostruire buona parte della Matematica, il che mostra come sia possibile fare a meno delle definizioni impredicative[20].

[20] Cfr. [Marchini 1996]

Bibliografia

[Bell - Machover 1977] Bell - Machover, *A course in mathematical logic*, North Holland, Amsterdam 1986[2]

[Borga 1981] Marco Borga, *Sulla concezione degli assiomi come definizioni implicite*, in Epistemologia IV (1981)

[Colli 1977] Giorgio Colli, *La sapienza greca*, vol. I, Adelphi edizioni, Milano 1992[2]

[Dopp 1957] Joseph Dopp, *Definizione*, in Enciclopedia filosofica, vol. I, Centro di studi filosofici di Gallarate, Istituto per la collaborazione culturale, casa editrice G. C. Sansoni, Firenze 1957, coll. 1424 e segg.

[Enriques 1931] Federigo Enriques, *Definizione*, in Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti, vol. XII, Istituto della Enciclopedia italiana fondata da Giovanni Treccani, Roma 1949, pagg. 483 e segg.

[Marchini 1996] Carlo Marchini, *Appunti delle Lezioni del corso di Logica Matematica*, maggio 1996

[Reale - Antiseri 1983] Giovanni Reale e Dario Antiseri, *Il pensiero occidentale dalle origini ad oggi*, vol. I, Editrice La Scuola, 1985[6]

[Rogers 1971] Robert Rogers, *Logica matematica e teorie formalizzate*, Feltrinelli Editore, Milano 1978

[Sciamannini 1957] Raniero Sciamannini, *Definizione: distinzioni scolastiche*, in Enciclopedia filosofica, vol. I, Centro di studi filosofici di Gallarate, Istituto per la collaborazione culturale, casa editrice G. C. Sansoni, Firenze 1957, col. 1431

[Severino 1994] Emanuele Severino, *Antologia filosofica*, Biblioteca Universale Rizzoli, Milano 1994

[Vanni Rovighi 1962] Sofia Vanni Rovighi, *Elementi di filosofia*, vol I, Editrice La Scuola, Brescia, 1989[15]