# Introduzione

Lo scopo che ci si è proposti con questa tesi è stato quello di avvicinare attraverso diverse vie (alcune formali, altre più naive, alcune prettamente tecniche, altre più filosofeggianti) la nozione di infinito in matematica.

Il termine greco che oggi si traduce con "infinito", ἀπείρον, solitamente viene fatto derivare da πέραζ (limite) e dunque gli si attribuisce il significato di "illimitato". Non manca però chi[1] lo deriva da πεῖρα (conoscenza, esperienza) e quindi lo intende come "inconoscibile", "insondabile".

È da questa duplice interpretazione che la tesi prende corpo; cercando, infatti, di pensare una possibile classificazione dei modi in cui i matematici hanno inteso il problema dell'infinito, si è voluto cogliere un suggerimento di Kant: "Pur nella grande ricchezza delle nostre lingue, il pensatore si trova spesso in imbarazzo nella ricerca di una espressione che risponda esattamente al suo concetto; e, in mancanza di questa, non gli riesce di farsi intendere bene nè dagli altri e nè anche da se medesimo. Coniare nuovi termini è come una pretesa di dettar leggi nella lingua; pretesa, la quale riesce di rado; e, prima di ricorrere a questo mezzo disperato, è prudente cercare di vedere in una lingua morta e dotta se già in essa non si trovi cotesto concetto insieme con la sua espressione appropriata"[2].

È più che altro l'illimitato che è stato oggetto di studio da parte dei filosofi e dei matematici; ma credo che la matematica, e soprattutto la matematica dei nostri giorni, abbia in sè la possibilità e la volontà di dire qualche cosa anche sull'insondabile, anche su ciò di cui non è possibile fare esperienza per altra via. Scrive a questo proposito Vopenka: "Mathematics is a means for surpassing the horizon of human experience. We use mathematics to express thoughts preceding our knowledge and for which later evidence is often impossible to obtain"[3].

---

[1] [Tannery 1904], pagg. 703 - 707
[2] [Kant 1781], Dialettica trascendentale, Libro I, Sezione I, pag. 304
[3] [Vopenka 1979], pag. 10

Nella tesi vengono allora considerate due concezioni di infinito che riflettono l'idea di "illimitato", una in modo potenziale e l'altra in modo attuale (secondo le categorie che da Aristotele in avanti hanno caratterizzato il pensiero filosofico sull'infinito), e una terza che trasmette invece l'idea di "inconoscibile".

Considerate queste tre tipologie di infinito matematico, parrebbe lecito chiedersi se ne esista una migliore delle altre. Questa tesi non vuole rispondere definitivamente a questa domanda, bensì si propone di esplicitare almeno alcuni dei diversi significati in cui in questo ambito si può intendere l'essere "migliore". Ad esempio: tra questi concetti si potrebbe preferire il più semplice da formalizzare, o quello che permette di ottenere maggiori risultati tecnici, o ancora quello che più si avvicina alla nozione intuitiva di infinito. In particolare si cercherà di far chiarezza su che cosa si possa intendere per "nozione intuitiva" e di mostrare come nessuna delle diverse concezioni analizzate possa appieno esaurire l'idea che l'uomo ha dell'infinito.

# Sommario

**Infinito come illimitato: l'infinito potenziale.**

Nel primo capitolo si illustra che cosa si intenda per infinito potenziale e si presenta tale concezione attraverso alcuni esempi.

In modo particolare si prende in considerazione la nozione di infinito che traspare dalla lettura degli Elementi di Euclide. Dapprima si analizzano alcune delle convinzioni matematico - filosofiche della Grecia antica che fecero nascere la necessità di distinguere il piano dell'infinito potenziale da quello attuale; successivamente si pone l'attenzione su alcuni postulati, alcune definizioni e alcuni teoremi dell'opera di Euclide, che mettono in risalto il suo modo di intendere l'infinito.

Si danno poi alcuni cenni ad altre teorie matematiche, oltre la geometria di Euclide, tra quelle che si sviluppano secondo una concezione potenziale: la teoria dei limiti, l'aritmetica di Peano e la matematica intuizionista.

**Infinito come illimitato: l'infinito attuale.**

Nel secondo capitolo si illustra che cosa si intenda per infinito attuale e si presenta tale concezione attraverso alcuni esempi.

Parte preponderante del capitolo è dedicata a Cantor: non poteva non essere così, visto che, parafrasando Hilbert, fu proprio Cantor a creare il paradiso degli insiemi e dei numeri attualmente infiniti[1]. Prima di avvicinarsi alla teoria dei numeri transfiniti, si presenta l'opera di alcuni, se così si può dire, precursori di Cantor, come Galileo, Bolzano e Dedekind. L'opera di Cantor è esposta seguendo inizialmente un criterio cronologico, che permette di capire quali problematiche lo spinsero ad affrontare la questione degli insiemi infiniti, e presentando poi l'aspetto finale della sua teoria, in modo da riuscire a coglierla nella sua compiutezza.

La teoria dei numeri transfiniti di Cantor èpresentata necessariamente in modo incompleto, ma non approssimativo: si è scelto infatti di enunciare e dimostrare almeno alcuni dei

[1] “Aus dem Paradeis, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können” è la celeberrima frase di Hilbert che compare nell'articolo dal titolo *Über das Unendliche* apparso sui Mathematische Annalen 95 (1926), parzialmente tradotto in [Cellucci 1967], pagg. 161 - 183

principali teoremi che di essa fanno parte. Tale scelta è stata fatta innanzitutto per poter apprezzare a fondo la novità e l'importanza delle intuizioni e dei metodi dimostrativi di Cantor; in secondo luogo per mettere in evidenza alcune problematiche in essa presenti e per porre il problema della loro dipendenza diretta dall'uso dell'infinito attuale o dalla mancanza di una adeguata formalizzazione. In quest'ottica vengono poi presentate alcune assiomatizzazioni della teoria degli insiemi e la soluzione, per via formale, di alcuni problemi lasciati irrisolti da Cantor.

Nell'ultima parte del capitolo, infine, si accenna all'utilizzo dell'infinito attuale in analisi: agli inizi del calcolo infinitesimale, nelle definizioni di numero reale e nell'analisi non-standard.

**Infinito come inconoscibile: l'nfinito naturale.**

Nel terzo capitolo si illustra che cosa si intenda per infinito naturale e si presenta tale concezione come appare essenzialmente dalla teoria alternativa degli insiemi di Petr Vopenka.

Di tale teoria si presentano innanzitutto i concetti base, in modo informale; in secondo luogo si illustra una sua possibile formalizzazione, precisamente quella introdotta da Carlo Marchini, nota come TAI; infine si danno alcuni cenni di come si possano costruire, nella teoria alternativa degli insiemi, dei modelli per alcune delle fondamentali strutture matematiche.

Anche il terzo capitolo presenta, seppur in maniera molto succinta, alcuni possibili altri esempi di teorie che abbracciano una visione dell'infinito come inconoscibile, due di essi in modo implicito (la numerazione nella Grecia antica e l'uso dell'assioma di scelta), il terzo in maniera più esplicita (una teoria degli insiemi finiti).

**Alcune conclusioni.**

Nel quarto capitolo si fornisce una rassegna di alcuni dei criteri attraverso i quali si potrebbe operare un confronto tra teorie matematiche che abbracciano una delle concezioni di infinito presentate nei primi tre capitoli.

L'attenzione non è però rivolta ad un confronto in questi termini, tant'è che solo alcuni dei criteri generali vengono applicati, peraltro a ben pochi esempi particolari: ciò su cui si vuole porre l'accento è il fatto che, da un punto di vista epistemologico, nessuna delle tre concezioni di infinito considerate possa essere ritenuta esauriente. Alla base di questa conclusione sta l'osservazione che l'infinito potenziale, quello attuale e quello naturale non sono tanto tre infiniti diversi, quanto tre modi che l'uomo ha per avvicinarsi all'infinito.