1.1. Significato

Secondo Aristotele "l'infinito non è ciò al di fuori del quale non esiste nulla, ma ciò al di fuori del quale esiste sempre qualcosa di diverso"[1]. Queste poche parole esprimono il concetto di infinito potenziale (o, secondo la terminologia medioevale, sincategorematico): l'infinito è solo in potenza, ma non nello stesso modo in cui un seme è una pianta in potenza: il seme un giorno sarà effettivamente una pianticella, ma l'infinito non diventerà mai qualcosa di compiuto, dato, attuale. Si parla di infinito potenziale, ad esempio, quando ci si riferisce ad una grandezza tale che, una volta che ne sia data una quantità finita, comunque grande, se ne può dare sempre una quantità ancora più grande. Quando si pensa in questi termini, si finisce col lavorare esclusivamente con entità finite, ma con la coscienza di poter a piacere ingrandire (o rimpicciolire) il finito con cui si sta trattando. L'infinito dunque non sta mai nella cosa di cui si parla, nell'entità su cui si discute, bensì nella coscienza che al di là di tale entità se ne può trovare un'altra, e poi un'altra ancora, e così via. Nell'istante presente si ha in mano esclusivamente un ente finito, ma si ha contemporaneamente la convinzione che in ciascuno degli istanti a venire si potrà trovare (all'interno di quella stessa collezione che si dice potenzialmente infinita) un ente diverso da tutti quelli considerati prima.

Infinite dunque non sono tanto le entità con cui si ha a che fare, bensì il processo attraverso il quale esse si possono accrescere, dividere, collezionare... Mi pare interessante, da un punto di vista epistemologico, quest'ultima osservazione; essa in qualche modo esprime la convinzione, non da tutti condivisa, che l'infinito non stia al di fuori dell'uomo, non sia un attributo delle cose, non sia una sostanza che esiste di per sé: la potenza dell'infinito è la potenza della mente dell'uomo. Siamo finiti, in un mondo finito, eppure possiamo pensare l'infinito...

[1] Aristotele, Fisica, 207 a 30, in [Aristotele Fi.], pag. 145

1.2. Esempi

1.2.1. La concezione di infinito negli Elementi di Euclide

Alcune premesse

Prima di soffermarmi su come Euclide affronta il problema dell'infinito, mi pare importante dare uno sguardo ad alcuni eventi che hanno svolto un ruolo determinante rispetto all'organizzazione della matematica data negli Elementi (e in particolare di ciò che riguarda il nostro argomento): la scoperta degli incommensurabili, la formulazione dei paradossi di Zenone e la definizione di Scienza deduttiva data da Aristotele.

Gli incommensurabili

La scoperta di grandezze geometriche incommensurabili, ovvero il cui rapporto non sia esprimibile mediante numeri interi, viene attribuita a Ippaso di Metaponto. Si narra che la crisi in cui cadde la scuola pitagorica, di cui Ippaso faceva parte, fu talmente grande che egli dovette pagare l'affronto fatto alle concezioni dominanti con la propria vita. I problemi erano essenzialmente due: l'esistenza di grandezze incommensurabili negava da un lato l'idea per cui "tutto è numero", ovvero tutto si può ridurre a rapporti tra numeri[1], dall'altro la visione dimensionale e concreta del punto geometrico.

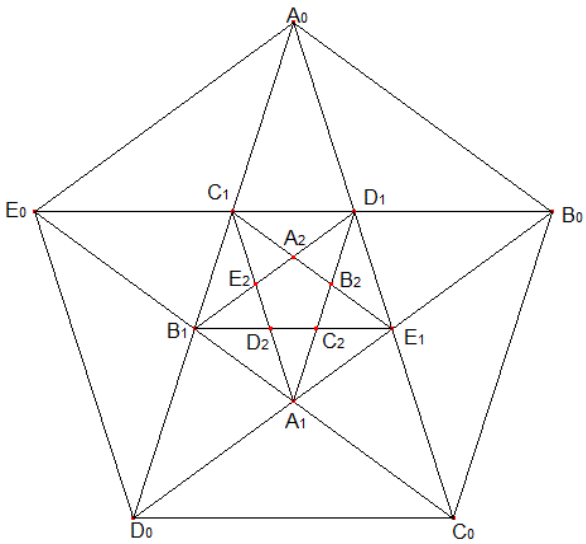
È interessante analizzare in che modo i greci siano giunti a questa scoperta. Secondo Aristotele i Pitagorici dimostrarono che la diagonale e il lato di un quadrato non sono commensurabili attraverso il procedimento per assurdo che ancora oggi si utilizza per dimostrare che $\sqrt{2}$ è irrazionale[2]. È però probabile che a questa dimostrazione astratta si

[1] Si tenga presente che per i Greci i numeri erano solamente gli interi positivi, anzi l'unità era qualcosa di primordiale, al di sopra dei numeri veri e propri; anche i razionali non erano intesi come numeri, bensì (come diremmo nella terminologia moderna) come operatori tra grandezze.

[2] Supponiamo per assurdo che la diagonale d e il lato l di un quadrato siano commensurabili; allora esistono due numeri naturali m ed n (che possiamo supporre primi tra loro e non nulli) il cui rapporto eguaglia quello tra la diagonale e il lato. Per il teorema di Pitagora il quadrato di d è equivalente al doppio del quadrato di l, e dunque dovrà essere anche $m^2 = 2n^2$. Allora m^2 è pari e dunque anche m è pari, e dunque esiste un numero naturale p tale che $m = 2p$. Poiché m ed n sono primi tra loro se ne deduce che n è dispari. Ma allora si avrebbe $4p^2 = (2p)^2 = m^2 = 2n^2$ da cui $2p^2 = n^2$ e dunque n^2 è pari. Ma allora anche n dovrebbe essere pari, contro l'ipotesi che m ed n non avessero fattori comuni.

sia giunti dopo un cammino fatto di considerazioni del tutto geometriche. Per capire i termini del problema è opportuno ritornare sulle grandezze commensurabili. Per esempio, si considerino due segmenti a e b, il primo più corto del secondo; per stabilire qual è il rapporto che c'è tra essi si riporta a su b un numero di volte sufficiente perché la parte rimanente r_1 sia minore di a stesso. A questo punto si ripete l'operazione tra r_1 ed a ottenendo alla fine un segmento r_2 ancora più piccolo di r_1. E così via: il processo va avanti fino a che non si trova un segmentino r_n che ricopra esattamente r_{n-1}. Tale r_n è sottomultiplo sia di a che di b. Ci si imbatte in due grandezze incommensurabili quando si trovano segmenti per i quali il procedimento sopra descritto non termina mai, per i quali cioè non si riesce a trovare un sottomultiplo comune in un numero finito di passaggi. Due casi particolari di cui i pitagorici erano a conoscenza erano quelli della diagonale e del lato del pentagono regolare e del quadrato[1], che vengono discussi di seguito.

Si consideri un pentagono regolare $A_0B_0C_0D_0E_0$. Se ne traccino le diagonali A_0D_0, B_0D_0, C_0E_0, C_0A_0, B_0E_0. Esse si incontrano nei punti A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 che formano un secondo pentagono regolare. Le diagonali A_1D_1, B_1D_1, C_1E_1, C_1A_1, B_1E_1 si incontrano nei vertici A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 di un terzo pentagono regolare, e così via.



Innanzitutto si dimostra che, dato comunque un pentagono regolare ABCDE, ogni suo angolo interno misura 108°; infatti il pentagono può essere scomposto nei tre triangoli Δ(ABC), Δ(ACD) e Δ(ADE), dunque la somma degli angoli interni del pentagono è di

[1] Si veda [Borga - Palladino 1997], pagg. 13 e segg. e [Giacardi - Roero 1979], pagg. 209 e segg.

$3\times180°=540°$ e di conseguenza ogni angolo misura $540°:5=108°$. I triangoli $\Delta(ABE)$, $\Delta(BCA)$, $\Delta(CDB)$, $\Delta(DEC)$ e $\Delta(EAD)$ sono tutti isosceli (essendo i lati del pentagono regolare tutti uguali tra loro) con angoli alla base che misurano $(180°-108°):2=36°$. Sia ora A'B'C'D'E' il pentagono che ha per vertici i punti di incontro delle diagonali del pentagono ABCDE. Il triangolo $\Delta(ABD')$ è isoscele in quanto gli angoli adiacenti al lato AB, per quanto visto prima, misurano entrambi 36°. Lo stesso ragionamento vale per i triangoli $\Delta(BCE')$, $\Delta(CDA')$, $\Delta(DEB')$ e $\Delta(EAC')$, che sono poi tutti congruenti essendolo le basi (che sono i lati del pentagono regolare). Si ottiene così che

$$AD'= BD'= BE'= CE'= CA'= DA'= DB'= EB'= EC'= AC'.$$

Si consideri ora il triangolo $\Delta(ABC')$. Si ha che

$$BAC'= BAE - C'AE = 108° - 36° = 72°$$

$$BC'A = BC'E -EC'A = 180° - (180° - 2 \times 36°) = 72°$$

e dunque esso è isoscele sulla base AC'. Lo stesso ragionamento vale per i triangoli $\Delta(BCD')$, $\Delta(CDE')$, $\Delta(DEC')$ e $\Delta(EAB')$, che sono poi tutti congruenti essendolo i lati obliqui (che sono i lati del pentagono regolare). Si ottiene così che

$$AB = BC'= BC = CD'= CD = DE'= DE = EA'= EA = AB'.$$

Nello stesso modo si ottiene anche che

$$AB = AE'= BC = BA'= CD = CB'= DE = DC'= EA = ED'.$$

Infine se si considera il triangolo $\Delta(D'CA')$, si ottiene che anch'esso è isoscele, essendo (per quanto già visto) $A'CD' = A'D'C = 36°$.

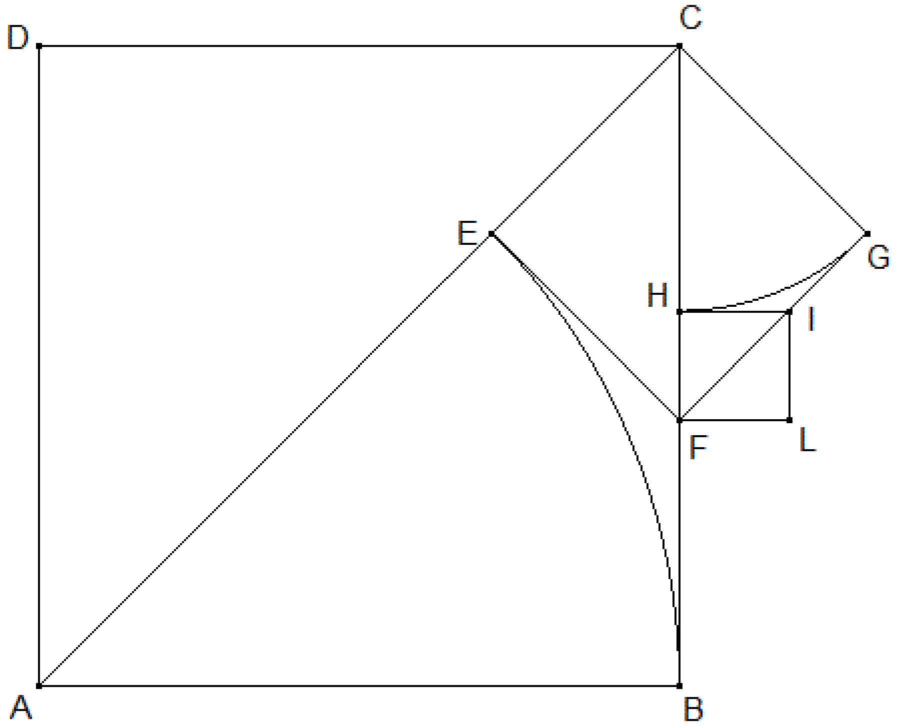
Si riconsideri adesso la costruzione iniziale. Si supponga che il lato A_0B_0 e la diagonale A_0D_0 siano commensurabili; allora essi ammettono un sottomultiplo comune v, tale dunque che si possa scrivere $A_0B_0 = lv$ e $A_0D_0 = dv$ con l e d numeri interi. Ma allora si avrebbe:

$$A_1B_1 = E_0A_1 - E_0B_1 = A_0B_0 - (E_0C_0 - C_0B_1) = A_0B_0 - (A_0D_0 - A_0B_0) = (2l - d)\, v$$

$$A_1D_1 = C_0A_1 = C_0E_0 - E_0A_1 = A_0D_0 - A_0B_0 = (d - l)v.$$

Ma allora v dovrebbe essere sottomultiplo del lato e della diagonale del pentagono $A_1B_1C_1D_1E_1$. Ma il ragionamento fatto si può ripetere su tutti i pentagoni successivi, ottenendo che v deve essere sottomultiplo di tutti i lati A_nB_n e di tutte le diagonali A_nD_n. Ciò non è possibile, poiché, procedendo nella costruzione dei pentagoni, si arriverà ad una figura con diagonale e lato entrambi minori di v.

Un procedimento del tutto analogo e legato al ripetere all'infinito uno stesso schema di pensiero si ha per quanto riguarda la diagonale e il lato del quadrato. Dato il quadrato ABCD si riporti sulla diagonale AC il lato AB, ottenendo il punto E; si conduca da E la perpendicolare ad AC fino ad incontrare in F il lato BC.



Si consideri allora il quadrato CEFG. Si supponga che il lato AD e la diagonale AC siano commensurabili; allora essi ammettono un sottomultiplo comune u, tale dunque che si possa scrivere AD = mu e AC = nu con m e n interi. I segmenti FE e FB sono tra loro congruenti, in quanto sono segmenti delle tangenti condotte dal punto F alla circonferenza di raggio AB e centro A. Allora si ottiene che

$$EC = AC - AE = AC - AD = nu - mu = (n - m)\, u$$

$$CF = CB - FB = AD - EF = AD - EC = mu - (n - m)\, u = (2m - n)\, u.$$

Ma allora u risulta sottomultiplo anche del lato e della diagonale del quadrato CEFG. Ora, si può ripetere la costruzione del quadrato più piccolo riportando il lato CG sulla diagonale CF, ottenendo il punto H da cui condurre la perpendicolare a FC fino ad incontrare in I il segmento FG. Allora u sarà sottomultiplo anche della diagonale e del lato di FHIL. Iterando lo stesso procedimento si otterrà alla fine un segmento che dovrà contemporaneamente essere più piccolo di u e ammettere u come sottomultiplo. Ciò non è

possibile e quindi si deduce che il lato e la diagonale del quadrato non sono commensurabili.
Ora, queste costruzioni geometriche mettono in luce come il problema delle grandezze incommensurabili sia legato a quello dell'infinito. Vedremo più avanti come la matematica greca riuscirà a conquistare una risposta al problema di esprimere il rapporto tra grandezze di questo tipo, attraverso lo sviluppo della teoria delle proporzioni, senza aver bisogno neppure di nominare l'infinito.

I paradossi di Zenone

La scuola pitagorica fu dunque scossa dalla scoperta dell'incommensurabilità di certe grandezze e fu chiaro che "una teoria delle proporzioni (o della misura), basata su un concetto empirico del punto-esteso, preso come elemento unitario di tutte le cose (monade)" non poteva bastare più. "Ora, mentre i pitagorici si affaticavano intorno a questa difficoltà, altri filosofi che del resto sono usciti dai medesimi circoli iniziano la critica dei concetti geometrici, riconoscendo che un pensiero razionale, che voglia mantenersi immune da contraddizioni, deve riguardare il punto come privo di estensione, la linea come lunghezza senza larghezza, la superficie senza spessore, e di qui vengono naturalmente condotti alla prime considerazioni infinitesimali. Questi critici razionalisti sono gli Eleati: Parmenide e il suo discepolo Zenone"[1]. In realtà è difficile stabilire quale effettivamente fosse il pensiero di Zenone, quali le teorie che si propose di confutare e cosa veramente volle dimostrare con i suoi paradossi; certo è che l'Eleata si rese conto di come il voler trattare razionalmente l'infinito porti irrimediabilmente a dei fastidi.
Potrebbe essere interessante analizzare ciascuno dei paradossi di Zenone e le riflessioni che essi hanno suscitato nei filosofi e nei matematici: dai noti paradossi sul moto (comunemente detti della dicotomia, di Achille e la tartaruga, della freccia, dello stadio) e sullo spazio, al meno comune paradosso del grano di miglio (che riguarda la percezione, ma dal punto di vista del matematico ha riflessi anche sul principio di induzione). Ci limitiamo però qui a riconoscere due caratteristiche portanti e innovative riguardanti il metodo dell'opera di Zenone. Innanzitutto egli ha in qualche modo inventato il

[1] [Enriques 1922], pagg. 8 e 9

procedimento di riduzione all'assurdo, largamente utilizzato dai geometri posteriori, da Euclide e dai matematici fino ai nostri giorni. Inoltre con Zenone "il pensiero coerente viene assunto senz'altro a misura della *verità*, cioè dell'esistenza metafisica, distinta e contrapposta all'*opinione* probabile che si riferisce alla realtà sensibile. Da questo razionalismo, per cui il pensiero non esita a staccarsi dalle apparenze fenomeniche per serbare rigida fede ai suoi principi, nasce il metodo dialettico, che è il germe della logica"[1].
Ai paradossi di Zenone, Aristotele risponderà attraverso la distinzione tra infinito potenziale e infinito attuale. Il tono di Aristotele è quello di chi vuole confutare il pensiero altrui, ma è Zenone stesso che, con i propri paradossi, rifiutando la concezione secondo la quale lo spazio ed il tempo sono indefinitamente divisibili in piccoli intervalli indivisibili, ha preparato la strada alle riflessioni dello Stagirita: "per Zenone il ritenere l'infinito un attributo dell'essere, per l'inesauribilità dell'infinito stesso, comporta irrazionalità ed impossibilità dell'essere. È questa la visione dell'infinito in *atto* contro cui argomenta"[2].

La scienza deduttiva di Aristotele

Si è già detto quale fosse l'opinione di Aristotele a riguardo dell'infinito. È però importante sottolineare come la sua preoccupazione di evitare l'infinito in atto gli impose delle scelte ben precise al momento in cui volle definire che cosa si deve intendere per scienza deduttiva. Basandosi sulla lettura fatta da Beth[3] degli Analitici Secondi si può dire che per Aristotele "una scienza deduttiva è un sistema S di termini e di enunciati tale che:

(1) [postulato di realtà]

 tutti gli enunciati di S concernono uno stesso dominio di oggetti reali;

(2) [postulato di verità]

 tutti gli enunciati di S sono veri;

(3) [postulato di deduttività]

 se certi enunciati appartengono ad S allora anche ogni conseguenza logica di questi enunciati appartiene a S

[1] [Enriques 1922], pagg. 9 e 10
[2] [Marchini 1994], pag. 5
[3] Cfr. [Beth 1955]

(4) [postulato di evidenza per termini]

esiste in S un numero finito di termini tale che:

(a) il significato di questi termini non ha bisogno di una spiegazione;

(b) il significato di ogni altro termine che sia presente in S può venir definito mediante questi termini;

(5) [postulato di evidenza per assiomi]

esiste in S un numero finito di enunciati tale che:

(a) la verità di questi enunciati è evidente;

(b) ogni altro enunciato di S è una conseguenza logica di questi enunciati"[1].

I due postulati di evidenza sono posti per evitare un regresso all'infinito: il fatto che Aristotele abbia sentito il bisogno di esplicitarli fa pensare che attraverso il linguaggio naturale sarebbe possibile (almeno in linea teorica) un procedimento infinito in cui ogni ente trova una definizione a partire da concetti più semplici, oppure (basti qui pensare alla struttura di un comune dizionario) un processo comunque infinito perché circolare.

L'infinito negli Elementi di Euclide

Si cercherà ora di illustrare cosa possa aver significato per la matematica greca accettare (e non senza qualche difficoltà) solo l'infinito potenziale. Si farà riferimento agli Elementi di Euclide così come essi appaiono nell'edizione curata da A. Frajese e L. Maccioni[2].

Libro primo: i principi

Tra le prime definizioni[3] date da Euclide si trovano le seguenti:

(df. I.1) Punto è ciò che non ha parti

[1] [Beth 1955], pagg. 11 e 12

[2] Tutte le citazioni dagli Elementi sono tratte da [Euclide]

[3] Tra le definizioni date da Euclide ne compaiono alcune alle quali gli attuali trattati di geometria hanno rinunciato: quelle dei così detti termini primitivi. Anche Euclide, che per altro conosceva l'idea aristotelica di scienza deduttiva e aveva bene in mente quello che è stato sopra riportato come 'postulato di evidenza per termini', probabilmente si rendeva conto che le definizioni da lui date avevano diversi valori. L'esigenza di definire anche i primissimi termini, quelli immediatamente evidenti, nasce dall'idea che l'edificio della geometria sia qualcosa che il matematico non si appresta a costruire, bensì semplicemente a descrivere. In quest'ottica diventa necessario fornire un modo per riconoscere e rendere individuabili tutti gli enti geometrici, anche quelli che, a rigore, non hanno bisogno di ulteriori spiegazioni.

(df. I.2) Linea è lunghezza senza larghezza

(df. I.3) Estremi di una linea sono punti

(df. I.4) Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa (cioè, ai suoi punti)

(df. I.14) Figura è ciò che è compreso tra uno o più termini

(df. I.23) Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

È chiaro allora che per Euclide una retta è sempre terminata; essa è dunque ciò che oggi si chiamerebbe un segmento, un tratto rettilineo limitato da due estremi fissati. Così come le rette, anche tutte le figure di cui Euclide si occupa sono (per la df. I.14) al finito. Dal momento in cui si vuole però parlare di parallelismo, sorge un non piccolo problema, perché due rette terminate, così come sono date, potrebbero essere "troppo corte" al fine di stabilire se sono parallele o meno. Per capire come Euclide risolva la questione è importante guardare a ciò che egli ritiene postulato, tra cui:

(ps. I.2) Che una retta terminata (= finita) si possa prolungare continuamente in linea retta

(ps. I.5) Che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (= tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (= la cui somma è minore di due retti).

Il (ps.I.2) ci autorizza a pensare in termini di infinito potenziale: data che sia una retta, essa può essere allungata passo passo ogni volta di un pochettino. In tal modo la (df. I.23) ci assicura che, se due rette, man mano prolungate, ad un certo punto si incontrano, esse non sono parallele. Ma che ne è delle rette per cui tale procedimento non porta ad alcun risultato? Come è possibile arrivare alla conclusione che due rette sono parallele dopo averle prolungate un numero finito (per quanto grande) di volte, ottenendo sempre e comunque dei segmenti finiti (per quanto lunghi)? Come essere sicuri che in un successivo prolungamento esse non si incontrerebbero? È il (ps. I.5) a dare una risposta. Esso evita questo controllo all'infinito trasportandolo al finito: invece che prolungare indefinitamente le rette, basta tagliarle con una trasversale e misurare gli angoli che tale trasversale forma con le due rette terminate date. È chiaro il vantaggio che si ha in questo modo escludendo l'infinito, ma è anche chiara la poca "evidenza" di tale postulato: significativo è il fatto che Euclide stesso dimostri le 28 proposizioni iniziali del Libro primo senza farne uso, costruendo così il primo esempio di geometria (diremmo oggi) dello spazio assoluto (ossia né euclideo, né non - euclideo).

Anche tra gli assiomi, o nozioni comuni, si trovano delle risposte date da Euclide a problemi connessi con l'infinito:

(ax. I.1) Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro

(ax. I.2) E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali

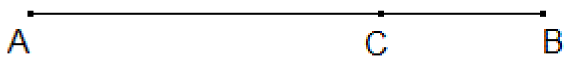
(ax. I.3) E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali

(ax. I.7) E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali

(ax. I.8) Ed il tutto è maggiore della parte.

L'ultimo di questi enunciati, comuni alla matematica e alle altre scienze, sembra proprio introdotto per evitare certi paradossi legati all'idea di infinito. Nel leggere l'ottavo assioma, non si può non ricordare l'aporia dello stadio di Zenone, nella quale si dice invece proprio che "la metà del tempo è uguale al doppio". Euclide vuole escludere la possibilità di incorrere in paradossi di questo tipo, il cui contenuto è però stato ripreso in modo assolutamente serio dalla matematica moderna: è noto infatti che un insieme infinito può essere messo in corrispondenza con un suo sottinsieme proprio. Risulta dunque chiaro che "gli assiomi di Euclide limitano il concetto di «uguaglianza» solo agli insiemi finiti"[1].

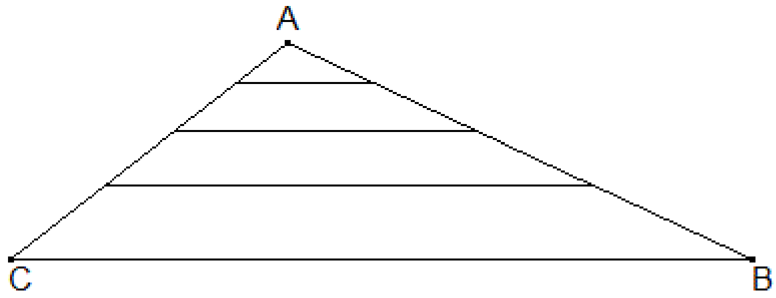
Dal punto di vista più strettamente geometrico l'ultimo postulato impedisce di pensare alla retta come composta da (infiniti) punti. Si considerino, ad esempio, due segmenti AB ed AC, il primo maggiore del secondo.



Se essi vengono sovrapposti, è chiaro che AC risulta essere una parte di AB. Ma se i due segmenti vengono disposti a formare i due lati di un triangolo, intersecandoli con il fascio di rette parallele al terzo lato BC, si evidenzia il fatto che ad ogni punto di AB corrisponde

[1] [Szábo 1990], pag. 32

uno ed un solo punto di AC e viceversa: allora essi contengono lo stesso numero di punti e, sotto quest'ottica, non sono più l'uno maggiore dell'altro.

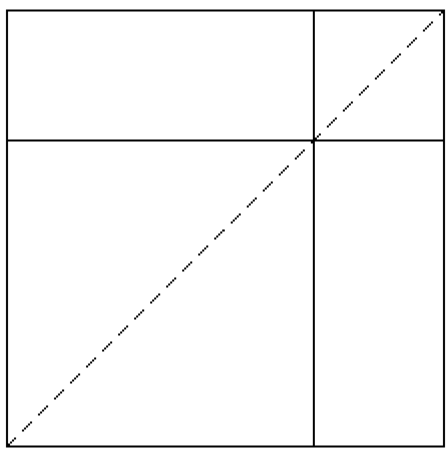


L'ottavo assioma, dunque, sembra essere una dichiarazione programmatica di Euclide con l'intento di eliminare radicalmente questo tipo di problematiche dall'ambito di indagine degli Elementi.

Libro secondo: l'algebra geometrica

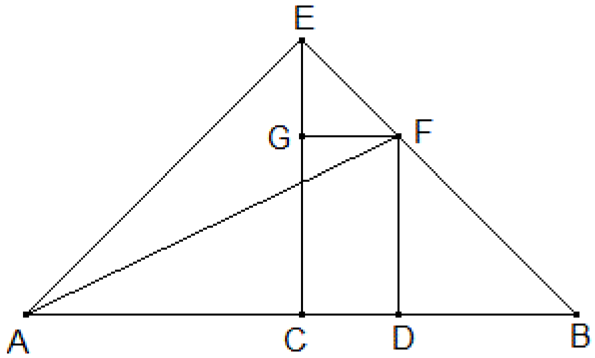
Nel secondo libro degli elementi, Euclide tratta quella che è stata poi chiamata "algebra geometrica": tale termine sta ad indicare che proposizioni corrispondenti a quelle dell'attuale algebra elementare vengono presentate sotto una veste geometrica. Tipico esempio è la quarta proposizione di questo libro, nella quale l'attuale formula del quadrato di un binomio somma è così espressa:

(pr. II.4) Se si divide a caso una linea retta, il quadrato di tutta la retta è uguale alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo compreso dalle parti [stesse].



La proposizione di questo libro maggiormente interessante a riguardo dell'infinito è la nona (di cui la decima costituisce una semplice variante). Essa presenta una regola per il calcolo approssimato di $\sqrt{2}$, nascosto sotto un procedimento geometrico:

(pr. II.9) Se si divide una linea retta in parti uguali e disuguali, la somma dei quadrati delle parti disuguali è il doppio della somma del quadrato della metà della retta e del quadrato della parte compresa fra i punti di divisione



Euclide esplicita: "Infatti, si divida una retta AB in parti uguali in C, ed in parti disuguali in D; dico che la somma dei quadrati di AD, DB è il doppio della somma dei quadrati di AC, CD"[1].

Per capire in che modo questa proposizione ha a che fare col procedimento di approssimazione del valore di $\sqrt{2}$, si può seguire la spiegazione proposta da Frajese nella

[1] Euclide procede poi con la dimostrazione, data in questo modo: "Si innalzi difatti la perpendicolare ad AB dal punto C [di questa], su essa si ponga CE uguale a ciascuna delle due rette AC, CB, e si traccino le congiungenti EA, EB, per D si conduca DF parallela ad EC, per F si conduca FG parallela ad AB, e si tracci [infine] la congiungente AF. Ora, poiché AC è uguale a CE, anche l'angolo EAC è uguale all'angolo AEC. E poiché l'angolo in C è retto, la somma degli angoli rimanenti EAC, AEC è uguale ad un retto; ed essi sono uguali, cosicché ciascuno dei due angoli CEA, CAE è metà di un retto. Per la stessa ragione, pure ciascuno dei due angoli CEB, EBC è metà di un retto; quindi tutto quanto l'angolo AEB è retto. E poiché l'angolo GEF è metà di un retto, e l'angolo EGF è retto - difatti esso è uguale all'angolo interno ed opposto ECB -, l'angolo rimanente EFG è metà di un retto; l'angolo GEF è quindi uguale all'angolo EFG, cosicché anche il lato EG è uguale al lato GF. Di nuovo, poiché l'angolo in B è metà di un retto, mentre l'angolo FDB è retto - esso è difatti, nuovamente, uguale all'angolo interno ed opposto ECB -, l'angolo rimanente BFD è metà di un retto; l'angolo in B è quindi uguale all'angolo DFB, cosicché pure il lato FD è uguale al lato DB. E poiché AC è uguale a CE, anche il quadrato di AC è uguale al quadrato di CE, per cui la somma dei quadrati di AC, CE è il doppio del quadrato di AC. Ma il quadrato di EA è uguale alla somma dei quadrati di AC, CE - difatti l'angolo ACE è retto -; quindi il quadrato di EA è il doppio del quadrato di AC. Di nuovo, poiché EG è uguale a GF, anche il quadrato di EG è uguale al quadrato di GF, per cui la somma dei quadrati di EG, GF è il doppio del quadrato di GF. Ma GF è uguale a CD; il quadrato di EF è quindi il doppio del quadrato di CD. Ma pure il quadrato di EA è il doppio del quadrato di AC; perciò la somma dei quadrati di AE, EF è il doppio della somma dei quadrati di AC, CD. Ma il quadrato di AF è uguale alla somma dei quadrati di AE, EF - difatti l'angolo AEF è retto -; il quadrato di AF è quindi il doppio della somma dei quadrati di AC, CD. MA [anche] la somma dei quadrati di AD, DF è uguale al quadrato di AF - l'angolo in D è difatti retto -; perciò la somma dei quadrati di AD, DF è il doppio della somma dei quadrati di AC, CD. Ma DF è uguale a DB; la somma dei quadrati di AD, DB è quindi il doppio della somma dei quadrati i AC, CD".

nota a tale proposizione[2]. Non essendo possibile trovare due interi m e n il cui rapporto fornisca esattamente il valore cercato, e dunque tali che si abbia

$$m^2 = 2\,n^2,$$

se ne cercano due che si avvicinino il più possibile a tale relazione, e precisamente tali che valga una delle seguenti:

$$m^2 = 2\,n^2 + 1 \quad \text{oppure} \quad m^2 = 2\,n^2 - 1.$$

È chiaro che tanto maggiori saranno i valori di m e n, tanto migliore sarà l'approssimazione (per eccesso, nel primo caso, o per difetto, nel secondo). Procedendo per tentativi, partendo dalla coppia $m = 1$ e $n = 1$ e man mano aumentando i valori, si ottiene la seguente tabella:

m	1	3	7	17	41	99	...
n	1	2	5	12	29	70	...

Osservando le coppie che così si sono formate ci si accorge che, presi comunque m e n in una colonna della tabella e chiamati M e N i valori presenti nella colonna successiva, si ha che:

$$N = m + n \quad \text{e} \quad M = m + 2n.$$

Ritorniamo ora alla (pr. II.9). Essa fornisce la costruzione di quattro segmenti di lunghezza, diciamo, m, M, n, N (con m < M e n < N) scelti in modo tale che si riesca a dimostrare che

$$M^2 + m^2 = 2\,(N^2 + n^2).$$

Tali segmenti, in riferimento alla delucidazione e all'applicazione alla figura (e anche alla dimostrazione riportata in nota), sono: AD di lunghezza M, DB di lunghezza m, AC di lunghezza N e CD di lunghezza n. Si ha che:

$$M = \text{AD} = \text{AC} + \text{CD} = \text{CB} + \text{CD} = \text{CD} + \text{DB} + \text{CD} = \text{DB} + 2\,\text{CD} = m + 2n$$

$$N = \text{AC} = \text{CB} = \text{DB} + \text{CD} = m + n.$$

Si verifica cioè che il legame che sussiste tra le quattro grandezze di cui parla la (pr. II.9) è lo stesso che permette di passare da un valore approssimato m/n di $\sqrt{2}$ ad un altro meglio approssimato M/N.

È interessante allora notare come Euclide non fugga del tutto gli irrazionali, ma comunque osi avvicinarsi ad essi solo rappresentandoli mediante grandezze geometriche. Così facendo egli evita l'infinito, da un lato perché quando costruisce la diagonale di un

[2] [Euclide], pagg. 178 - 182

quadrato ottiene tale grandezza, incommensurabile rispetto a quella del lato, con un procedimento del tutto finito; d'altro lato perché anche quando potrebbe dare una regola per ottenere grandezze commensurabili il cui rapporto si avvicini indefinitamente a $\sqrt{2}$ non lo fa che dimostrando una proposizione completamente al finito, senza fare alcun cenno alla possibile reiterazione del procedimento da lui illustrato.

Libro quinto: la teoria delle proporzioni di Eudosso

Il quinto libro degli Elementi presenta la teoria generale delle proporzioni, probabilmente senza troppe modifiche rispetto a quella elaborata da Eudosso di Cnido nel sec. IV a.C. Determinante è il fatto che tale teoria si può applicare a grandezze commensurabili, ma anche incommensurabili, "senza aver bisogno dell'infinito in atto, anzi senza mai neppure nominare l'infinito"[1]. Vediamo le definizioni enunciate da Euclide all'inizio del libro.

(df. V.1) Una grandezza è parte di una grandezza, la minore di quella maggiore, quando essa misuri la maggiore

(df. V.2) La grandezza maggiore è multipla di quella minore, quando sia misurata dalla minore

(df. V.3) Rapporto fra due grandezze omogenee è un certo modo di comportarsi rispetto alla quantità

(df. V.4) Si dice che hanno fra loro rapporto le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente

(df. V.5) Si dice che [quattro] grandezze sono nello stesso rapporto, una prima rispetto ad una seconda ed una terza rispetto a una quarta, quando risulti che equimultipli della prima e della terza [presi] secondo un multiplo qualsiasi, ed equimultipli della seconda e della quarta [presi pure] secondo un multiplo qualsiasi, sono gli uni degli altri, cioè ciascuno dei due primi del suo corrispondente fra i secondi, o tutti e due maggiori, o tutti e due uguali, o tutti e due minori, se considerati appunto nell'ordine rispettivo (quando cioè, presi equimultipli qualunque della prima grandezza e della terza ed equimultipli qualunque della seconda e della quarta, secondo che il

1 [Marchini 1994], pag. 9

multiplo della prima sia maggiore, uguale o minore del multiplo della seconda, l'equimultiplo della terza è corrispondentemente maggiore, uguale o minore dell'equimultiplo della quarta)

(df. V.6) Grandezze che hanno lo stesso rapporto si chiamino proporzionali

Consideriamo le prime due definizioni di questo libro. Si può giustificare completamente la loro presenza e capire a fondo il loro significato (soprattutto in rapporto al tema dell'infinito potenziale) ricordando quanto scrive Aristotele: "Si dice «parte» in un senso, ciò in cui una quantità può, in una maniera qualunque, essere divisa (sempre, infatti, ciò che viene sottratto alla quantità si considera parte di quella, come il due può essere considerato una parte del tre); in un altro senso, il termine si riferisce solo a quelle che, tra le parti indicate nell'accezione precedente, possono misurare l'intero: perciò, sotto un certo profilo, si può dire che il due è una parte del tre, sotto un altro profilo no"[1]. Euclide sente dunque il bisogno di specificare a quale dei significati attribuiti alla parola "parte" intende far riferimento: come sottomultiplo, secondo un numero naturale, di una grandezza data. In quest'ottica "la possibilità di trovare parti è collegata con la possibilità di dividere una grandezza, però sempre secondo un numero naturale e l'infinità che viene considerata è la stessa con cui vengono considerati i numeri naturali"[2].

La (df. V.3) esprime l'omogeneità come condizione necessaria affinché due grandezze possano essere tra loro paragonate; tale termine è considerato un concetto primitivo.

La (df. V.4) enuncia un'ulteriore condizione cui le grandezze devono sottostare al fine di obbedire alla teoria delle proporzioni che Euclide sta per presentare: il cosiddetto postulato di Archimede[3]. Esso limita la considerazione del rapporto tra due grandezze solo al caso in cui la minore di esse, con un'addizione ripetuta, possa ad un certo punto superare la maggiore. Vengono dunque escluse le grandezze dette non - archimedee, come ad esempio gli angoli rettilinei e curvilinei presi assieme[4]. Un'importante osservazione a proposito di

[1] Aristotele, Metafisica, libro V, 1023 b 25, in [Aristotele Me.], pag. 164

[2] [Marchini 1994], pag. 11

[3] In [Pizzamiglio 1995] si legge che tale condizione fu definita da O. Stoltz nel 1883 come 'Postulato di Archimede' a causa dell'uso che egli ne fa nelle sue opere, ma che dal punto di vista storico sembra più precisa la denominazione di 'Postulato di Eudosso - Archimede', essendo esso dovuto a quell'Eudosso di Cnido che è l'autore della teoria delle proporzioni.

[4] Euclide stesso nella (pr. III.16) dimostra che non esiste alcun sottomultiplo di un angolo rettilineo che sia minore dell'angolo di contingenza, cioè dell'angolo curvilineo compreso tra una circonferenza e una sua tangente.

questo postulato riguarda il suo rapporto con quello di continuità enunciato da Dedekind nel XIX secolo: il primo è deducibile dal secondo e, pur non essendo ad esso equivalente, contiene in sé, come annota Frajese, “una *carica* di continuità”[5], nel senso che impone un collegamento tra le varie grandezze senza che ci siano distacchi incolmabili.

La (df. V.5) è in sostanza la definizione di proporzione, anche se questo termine viene introdotto solo nella (df. V.6). In termini moderni essa può essere così enunciata: date quattro grandezze A, B, C e D (con A e B omogenee tra loro, così come C e D) scriviamo che $A : B = C : D$ se per ogni coppia di numeri interi positivi m e n per cui si abbia

$$mA > nB \quad \text{oppure} \quad mA = nB \quad \text{oppure} \quad mA < nB$$

si ha anche rispettivamente

$$mC > nD \quad \text{oppure} \quad mC = nD \quad \text{oppure} \quad mC < nD.$$

Questa definizione probabilmente non è di immediata comprensione o intuizione, ma la sua potenza sta nel fatto che in questo modo si possono trattare sia grandezze commensurabili, che grandezze incommensurabili, come si vede dalle seguenti osservazioni.

Nel caso in cui si voglia negare la proporzione $A : B = C : D$, è sufficiente (sia se le grandezze sono commensurabili sia se non lo sono) trovare una coppia di interi positivi per cui si abbia $mA > nB$ e $mC \leq nD$, come specificato nella (df. V.7). Le cose si complicano quando si voglia affermare la proporzionalità tra grandezze. Ora, nel caso di grandezze commensurabili, la (df. V.5) è parecchio sovrabbondante: se consideriamo solo grandezze di questo tipo, per dire che $A : B = C : D$ basta trovare due numeri interi positivi m e n per cui si abbia $mA = nB$, che sono poi quei numeri naturali il cui rapporto eguaglia quello tra le due grandezze. Al fine di inglobare anche le grandezze incommensurabili nella teoria delle proporzioni, occorre invece in qualche modo introdurre l’infinito: si rende infatti necessario paragonare tra loro *tutti* gli equimultipli delle due coppie di grandezze e la concordanza prevista dalla definizione deve essere verificata per tutti gli infiniti valori possibili. Infatti, è chiaro innanzitutto che se A, B e C, D sono coppie di grandezze incommensurabili non si troveranno mai due interi positivi m e n per cui si abbia $mA = nB$ e $mC = nD$; l’attenzione va dunque spostata sulle disuguaglianze. Ora, se anche si trova una coppia m e n per cui si abbia (ad esempio) $mA > nB$ e $mC > nD$, ciò non può portare a concludere che le quattro grandezze siano in proporzione: nel linguaggio odierno diremmo

[5] [Euclide], pag. 298

semplicemente che il numero razionale n/m è una approssimazione per difetto sia del numero reale individuato dal rapporto $A : B$ che di quello individuato da $C : D$; per affermare che questi due numeri reali coincidono occorre che l'insieme di tutti i razionali che sono un'approssimazione per difetto del primo sia uguale all'insieme di tutti i razionali che lo sono del secondo. È chiaro allora come sia proprio la stessa sostanza di questa teoria ad essere stata ripresa nel XIX secolo da Dedekind per formulare la nozione dei reali come *sezione* dell'insieme dei numeri razionali. Certo è che l'atteggiamento di Eudosso ed Euclide a riguardo dell'infinito risulta, dall'esposizione di questa teoria, molto diverso da quello di Dedekind. Negli Elementi i rapporti tra grandezze non vengono mai considerati come numeri; non si è potuto evitare di introdurre l'infinito, ma si tratta pur sempre di un infinito potenziale, mai raggiunto: il rapporto tra due grandezze incommensurabili non verrà dato come tale, ma verrà semplicemente approssimato sempre meglio da rapporti di numeri interi. "L'atteggiamento di Eudosso sembra più vicino alla esperienza delle misure in fisica. Ogni misura diretta è data da un numero razionale. La possibilità di un aumento di precisione degli strumenti corrisponde alla totalità potenzialmente infinita delle grandezze commensurabili che approssimano il rapporto di due incommensurabili"[1]. Diversa è la posizione di Dedekind: ogni numero reale è dato dalla coppia di due insiemi (quello di tutti i razionali che lo approssimano per eccesso e quello di tutti quelli che lo approssimano per difetto) che sono entrambi infiniti in atto.

Libri settimo, ottavo e nono: la teoria dei numeri

I libri settimo, ottavo e nono si presentano strettamente connessi tra loro e sono dedicati all'approfondimento della teoria dei numeri naturali. A riguardo dell'infinito, un importante spunto di riflessione è dato a proposito dei numeri primi. Nel nono libro si legge infatti:

(pr. IX.20) Esistono [sempre] numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi si voglia proporre.

[1] [Marchini 1994], pag. 12

Anche in questo caso Euclide non nomina direttamente l'infinito; esso è ancora una volta inteso solo in senso potenziale: comunque si consideri un insieme finito di numeri primi, ne esiste sempre almeno un altro ad esso non appartenente. La dimostrazione è condotta da Euclide con soli tre numeri primi: dati a, b, c numeri primi egli considera il numero

$$d = abc + 1.$$

Se d è primo, allora lo scopo è raggiunto, perché si è trovato un numero primo d diverso da a, b e c. Se d non è un numero primo, allora ammette tra i suoi divisori un numero primo h diverso dall'unità. Se fosse $h = a$, oppure $h = b$, oppure $h = c$, allora h dividerebbe abc, oltre che dividere d. Ma allora h dividerebbe anche

$$d - abc = abc + 1 - abc = 1$$

il che è chiaramente impossibile. Allora comunque si è trovato un numero primo h diverso da a, b e c.

È chiaro che questa dimostrazione condotta con soli tre numeri primi può essere ripetuta con un qualsiasi numero finito di primi e che quindi ci conduce alla tesi della (pr. IX.20).

Libro dodicesimo: il metodo di esaustione

Il dodicesimo libro degli Elementi è occupato dalla trattazione di alcuni problemi per i quali Euclide applica il cosiddetto metodo di esaustione[1], come ad esempio per la determinazione dell'area del cerchio e dei volumi della piramide, del cono, del cilindro e della sfera. Il metodo di esaustione è una tecnica dimostrativa che permette di dare una prova di risultati ottenuti per via intuitiva o per mezzo di considerazioni meccaniche: l'idea è quella di dimostrare che una grandezza C è uguale ad una grandezza S (già nota per altra via, come si diceva) facendo vedere che non può essere $C > S$ né $C < S$.

Determinanti per tale procedimento sono: innanzitutto il Postulato di Eudosso-Archimede, dal quale è possibile dimostrare che date due grandezze disuguali A e B, con $A > B$, se da A si toglie più della sua metà, ottenendo la grandezza A_1, e poi da A_1 si toglie più della sua metà, e così via, allora ad un certo punto si ottiene un residuo A_n che risulta essere minore

[1] Questa denominazione fu data al metodo originale di Eudosso da G. de Saint Vincent nel 1647 e significa "esaurimento". In realtà essa è quantomeno impropria, perché (come si vedrà) l'essenza di questo procedimento non sta (come invece il nome farebbe pensare) nel riuscire ad esaurire una figura curvilinea con dei poligoni.

di B (indicheremo questa proposizione come Proprietà di Esaustione[1]); e inoltre la possibilità di costruire una successione indefinitamente prolungabile di grandezze opportune.

Il metodo può allora essere così schematizzato: si voglia dimostrare che $C = S$; si procede in due parti distinte, mostrando dapprima che non può essere $C > S$ e solo in un secondo momento che non può essere nemmeno $C < S$. Si supponga che sia $C > S$; allora si può considerare la grandezza (B=) C-S. La successione opportuna è in questo caso una successione di grandezze G_1, G_2, G_3, ..., G_n, ...che siano tutte minori di S (e quindi anche di C) e tali che: (A_1=) C-G_2 sia minore della metà di (A=) C-G_1, (A_2=) C-G_3 sia minore della metà di (A_1=) C-G_2, (A_3=) C-G_4 sia minore della metà di (A_2=) C-G_3, e così via. Allora, per la Proprietà di Esaustione, si troverà una (A_n=) C-G_{n+1} tale che (A_n=) C-G_{n+1} < C-S (=B), e dunque $G_{n+1} > S$, il che non può essere per la scelta della successione delle grandezze G_k.
Per la seconda parte della dimostrazione si procede in maniera analoga.

Come esempio particolare di applicazione di questo procedimento ci si può riferire alla seconda proposizione, ma è chiaro che si tratta di un metodo standard utilizzato sistematicamente in tutto il libro:

(pr. XII.2) I cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri[2].

Pare chiaro a questo punto il fatto che il metodo di esaustione coinvolge sostanzialmente l'infinito, ma, ancora una volta, come infinito in potenza.

Per cogliere fino in fondo l'idea di infinito di Euclide, può essere interessante osservare che prima di lui, e prima di Aristotele, c'era stato qualcuno che la pensava diversamente.

[1] Si tratta della (pr. X.1): "[Assumendosi come] date due grandezze disuguali, se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restante un'altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente, rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezza minore [inizialmente] assunta".

[2] Per dimostrare la (pr. XII.2) Euclide procede in questo modo: siano C', C due cerchi e Q', Q i quadrati dei rispettivi diametri. Si vuol dimostrare che $C' : C = Q' : Q$ ossia che $Q' : Q = C' : C$. Si ammette innanzitutto che dopo tre grandezze, di cui almeno le prime due siano omogenee (cosa che in questo caso è verificata), esista la quarta proporzionale. Sia allora S la quarta proporzionale dopo Q', Q e C'. Lo scopo è dimostrare che $C = S$. Lo schema della dimostrazione è quello sopra esposto. Si supponga dunque che sia $C > S$. Si consideri la successione dei poligoni regolari inscritti nel cerchio C così definiti: per ogni intero positivo k, G_k è il poligono regolare di 2^{k+1} lati inscritto in C (dunque G_1 è il quadrato, G_2 è l'ottagono regolare e così via). In base alla (pr. XII.1), per la quale "poligoni simili iscritti in cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri [dei cerchi stessi]", si dimostra che G_1, G_2, G_3, ..., G_n, ... < S e per ipotesi a sua volta $S < C$. Sono dunque soddisfatte tutte le condizioni per cui dire, applicando la Proprietà di Esaustione, che esisterà un poligono tale che C-G_{n+1} < C-S, da cui l'assurdo $G_{n+1} > S$. Si suppone poi che sia $C < S$ e, procedendo analogamente, si arriva comunque ad un assurdo. Se ne conclude che $C = S$.

Risulta infatti - seguendo l'analisi fatta dallo Zellini[1] - che Antifonte (uno dei Sofisti) "pensava di poter trovare un quadrato di area uguale a quella di un cerchio assegnato appellandosi all'evidenza di una indistinguibilità del minimo arco di circonferenza dal minimo segmento di retta; un corollario della dimostrazione era l'esistenza in atto di un'infinità di oggetti distinti. [...] Poiché è costruibile un quadrato equivalente a un poligono regolare con un numero qualsiasi di lati, comunque grande sia questo numero, e poiché un poligono i cui lati non si distinguano dagli archi di una circonferenza è da ritenersi uguale a questa circonferenza, Antifonte concludeva che una quadratura del cerchio è possibile"[2]. Per il Sofista, si trattava dunque di considerare attualmente un poligono con un'infinità di lati. In questa stessa ottica si esprimerà, secoli e secoli più tardi, Saccheri, proprio commentando la (pr. XII.2): "Euclide ha già dimostrato (prop. 1) che due poligoni simili, inscritti in due cerchi, stanno tra loro come i quadrati dei diametri; proposizione da cui, come corollario, avrebbe potuto ricavare la 2 considerando i cerchi come poligoni infinitilateri"[3]

Ben lontano è Euclide da queste posizioni: il metodo di esaustione non elimina l'infinito (così come non riusciva a farlo la teoria delle proporzioni di Eudosso), ma si tratta pur sempre di un infinito in potenza: per dimostrare la (pr. XII.2) c'è bisogno di una successione inesauribile di grandezze (è necessario infatti ammettere che dato il poligono G_k sarà sempre possibile costruibile il poligono G_{k+1}), ovvero è indispensabile introdurre una infinità in potenza delle figure geometriche; ma mai si considererà il poligono di infiniti lati né alcun'altra quantità attualmente infinita.

[1] Cfr. [Zellini 1980]
[2] [Zellini 1980], pagg. 31 e 32
[3] Gerolamo Saccheri (1667-1733), Euclides ab omni naevo vindicatus, traduzione di Boccardini, Hoepli edizioni, Milano 1904, pag. 104, citato da A. Frajese in [Euclide], pag. 931

1.2.2. Altri esempi

Anche se gli Elementi di Euclide illustrano bene che cosa si intenda per infinito potenziale e come questo concetto possa essere applicato alla matematica, mi pare importante fornire alcuni altri esempi, senza la pretesa di esaurire in tal modo tutti quelli possibili. Come si vedrà, non si tratta di teorie matematiche contemporanee o di poco posteriori alla stesura dell'opera euclidea, né di teorie che trattano problematiche strettamente legate alla geometria: questo per sottolineare come la scelta di operare pensando l'infinito come potenza non deve pensarsi imposta dai tempi, né dagli argomenti.

La teoria dei limiti

Anche senza approfondire e soffermarsi sulla storia del calcolo infinitesimale (dalle sue origini negli "indivisibili" di Galileo e Cavalieri, ai suoi sviluppi negli "incrementi evanescenti" di Newton e nelle "grandezze inassegnabili" di Leibniz) è facile rendersi conto di come agli inizi non ci fosse chiarezza sulla natura degli enti con cui si stava incominciando a lavorare.

Questa ambiguità è confermata sia da alcune dichiarazioni degli stessi autori[1] della nascente teoria, sia dai commenti nati contro di essa da parte di filosofi e matematici. Scrive, ad esempio, l'arcivescovo irlandese George Berkeley (1685-1753): "Non sono né grandezze finite, né grandezze infinitamente piccole, e neppure nulla. Non possiamo chiamarli fantasmi di grandezze scomparse?"[2].

E ancora: "Io non discuto le vostre conclusioni, ma soltanto la vostra logica e il vostro metodo. Come voi dimostrate? Quali sono gli oggetti dei quali vi occupate e con quale chiarezza li concepite? Quali sono i principi del vostro procedere? Quanto sani essi sono e

[1] Scrive Enriques: "Se questi infinitesimi vadano intesi soltanto in senso *potenziale*, cioè come quantità variabili evanescenti, ovvero staticamente come *infinitesimi attuali*, non appare chiaramente nell'opera di Leibniz. Sembra che egli comprendesse che l'infinitesimo potenziale è sufficiente alla costruzione del calcolo, ma d'altra parte ragioni metafisiche portavano nella sua mente l'infinito e l'infinitesimo attuale: «Je suis tellement pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu' elle l'affecte partout pour mieux marquer la perfection de son Créateur»" [Enriques 1938], pagg. 60 e 61

[2] Citato in "La risoluzione dei paradossi di Zenone sul moto" di William I. McLaughlin, in Le Scienze, numero 317, gennaio 1995, pag. 62

come li applicate? Bisogna ricordare che io non mi interesso della verità dei vostri teoremi, ma soltanto della via che percorrete per arrivarvi; se questa è legittima o illegittima, chiara od oscura, razionale o sperimentale"[1].

C'è da dire poi che l'ambiguità non era solo concettuale: la mancanza di rigore dei metodi utilizzati nel primo calcolo infinitesimale (pur avendo comunque permesso di ottenere importanti sviluppi) lasciava spazio anche a risultati dubbi (ad esempio si cadeva in incongruenze nella trattazione delle serie[2]). Ci si rese conto ben presto, grazie soprattutto alla azione critica di Cauchy (1789-1857), della necessità di rifondare l'analisi attenendosi al massimo rigore concettuale e deduttivo.

Ora, come non si è qui trattata nei particolari la nascita del calcolo infinitesimale, così non si seguirà passo passo il suo processo di rigorizzazione; a riguardo dell'infinito vi sono però alcune osservazioni che non è possibile tralasciare.

È stato detto infatti che "si può leggere l'opera di sistemazione dell'analisi di Cauchy come un definitivo abbandono dell'infinito in atto nella Matematica"[3]. Questo passaggio avviene attraverso la definizione totalmente esplicita e formale del concetto di limite. Il programma di Cauchy viene portato a pieno compimento da Weierstrass (1815-1897) con l'introduzione dello stile degli ε-δ utilizzato ancora oggi in molte esposizioni di analisi.

È in questo modo che ci si sbarazza dell'infinito in atto: gli ε e i δ sono sempre quantità finite e non nulle; gli infinitesimi non sono più visti come entità costanti, bensì come funzioni il cui limite è zero; e così, via via, vengono risistemati "al finito" i concetti di continuità, derivate, integrali, serie.

In realtà non si tratta di un passaggio da una visione coinvolgente l'infinito ad un'altra totalmente (come s'è detto prima) al finito: infatti ogni ε è sì di per sé una quantità finita,

---

[1] [Berkeley 1754], pagg. 75-76

[2] Vi sono esempi illustranti questa situazione anche molto semplici. Uno tra tutti quello riguardante le serie geometriche. Era nota infatti la formula con cui si poteva ottenere il valore di convergenza della serie geometrica di ragione q, con $|q| < 1$:

$$\sum_{h=0}^{\infty} q^h = \frac{1}{1-q}$$

Ma Eulero applica la stessa formula anche alla serie di ragione $q = 2$, ottenendo il risultato (assurdo!) che la somma di infiniti numeri positivi è data da un numero negativo:

$$\sum_{h=0}^{\infty} 2^h = \frac{1}{1-2} = -1.$$

[3] [Marchini 1994], pag. 31

ma gli ε coinvolti nelle definizioni di Weierstrass sono tutti quelli possibili, e chiaramente sono in numero infinito. È però chiaro il riferimento alla potenza: dato un ε si deve trovare un δ, se poi l'ε cambia si dovrà cercare un altro δ, in un processo dinamico potenzialmente ripetibile all'infinito.

L'assiomatizzazione dell'aritmetica di Peano

Un altro campo in cui in pieno Ottocento emerge l'infinito potenziale è l'aritmetica, in particolare nella sistemazione rigorosa che di essa dà Peano. La formulazione dei suoi assiomi cui solitamente si fa riferimento è quella che compare nel saggio "Sul concetto di numero"[1] del 1891.

Peano adotta come concetti primitivi quello di numero (*N*), quello di uno (1) e quello di successivo (se *a* è un numero, *a*+1 denota il successivo di *a*). È significativo il fatto che per il matematico italiano il concetto di numero non sia riconducibile a concetti più semplici (non dimentichiamo che nello stesso periodo Dedekind e Frege cercarono di caratterizzare i numeri naturali riconducendoli a concetti logici e insiemistici). Gli assiomi del 1891, scritti in notazione peaniana[2], sono i seguenti:

(1) $1 \in N$

(2) $a \in N \,.\supset.\, a + 1 \in N$

(3) $a \in N \,.\supset.\, a + 1 \mathrel{-=} 1$

(4) $a, b \in N \,.\supset:\, a + 1 = b + 1 \,.\supset.\, a = b$

(5) $k \in K \,.:\, 1 \in k \,:.\, x \in N \,.\, x \in k \,:\supset_x.\, x + 1 \in k \,::\supset N \supset K$

ovvero:

(1) uno è un numero;

(2) il successivo di un numero è un numero;

(3) uno non è successivo di alcun numero;

(4) se due numeri hanno uguale successivo, allora sono uguali;

[1] [Peano], pagg. 80-109

[2] In tale notazione: il simbolo ⊃ indica l'implicazione fra proposizioni; il simbolo = è usato sia per l'uguaglianza tra numeri che per l'equivalenza tra proposizioni; il simbolo - indica la negazione; il simbolo $\supset_x$ indica un'implicazione sulla quale va operata una quantificazione universale su *x*; infine l'uso dei punti sostituisce quello delle parentesi.

(5) se una proprietà vale per uno e, se vale per un numero allora vale anche per il successivo di quel numero, allora vale per tutti i numeri.

Un primo fatto da cui traspare una concezione potenziale in Peano è l'interpretazione che egli dà dei simboli $\in$ e N: il primo non indica appartenenza, bensì è semplicemente la copula di un predicato nominale; così il secondo non indica un insieme, bensì sta semplicemente per 'numero'. Gli assiomi di Peano dunque non si riferiscono direttamente a tutto l'insieme in blocco dei numeri naturali, dato in atto una volta per tutte, bensì danno delle proprietà di ciascun numero naturale singolarmente preso.

Un secondo motivo di riflessione a proposito dell'infinito è fornito dal principio di induzione matematica (l'assioma (5) di Peano) che, qui come altrove, costituisce una proprietà fondante del concetto di numero naturale: la prima parte del principio richiede che si dimostri la proprietà in questione per il numero uno; ma allora, in base alla seconda parte, essa risulta dimostrata anche per il successivo di uno, e per il successivo di quest'altro numero, e così via. È questo "e così via", insito nel ragionamento per induzione, che si fonda proprio su una concezione potenziale.

L'infinito nella matematica intuizionista

Tutti gli esempi finora presentati come modelli di teorie che abbracciano una concezione potenziale dell'infinito in matematica si riferiscono al periodo pre-cantoriano o al massimo contemporaneo a Cantor stesso. L'importanza del riferimento (anche temporale) a questo matematico si coglie molto semplicemente pensando al fatto che, come paradigma di teoria che si sviluppa all'interno di una concezione attuale dell'infinito, verrà presentata nel prossimo paragrafo proprio quella dei numeri transfiniti di Cantor (1845 - 1918). È innegabile, in particolar modo da parte di chi rifletta sulla matematica come strumento per avvicinare l'infinito, il fatto che con Cantor essa abbia fatto delle conquiste strepitose; ma per non cadere nell'errore di pensare che in quegli anni sia stata pronunciata una parola definitiva su tale argomento, diventa indispensabile porre lo sguardo, seppur velocemente, sulle posizioni di alcuni matematici del Novecento che pensano invece in termini di infinito potenziale.

Nel 1907 il ventiseienne olandese Luitzen Egbertus Jan Brouwer sferrò, con la sua tesi di dottorato, un attacco a tutta la matematica "classica": alla teoria degli insiemi di Cantor, al logicismo di Russell, all'impostazione assiomatica data da Hilbert, al ruolo prioritario che era stato in quegli anni assegnato alla logica e al linguaggio. Per sfruttare le categorie utilizzate dagli storici della matematica, Brouwer si pose all'interno del *costruttivismo* per generare una corrente nuova, l'*intuizionismo*, che si rivelò interessante da un punto di vista filosofico ma certamente anche feconda da un punto di vista più strettamente matematico.

L'idea fondamentale da cui parte Brouwer è questa: la matematica è creata "da una libera azione, indipendente dall'esperienza e si sviluppa da una sola intuizione fondamentale a priori"[1]. È esplicito il riferimento a Kant, per il quale le affermazioni delle scienze esatte sono giudizi sintetici a priori, ma il ruolo fondante che questi attribuiva all'a-priori dello spazio, Brouwer lo assegna a quello del tempo. La matematica diventa la prima e primordiale attività della mente umana: un soggetto, nel tempo, ferma la propria attenzione su una sensazione e in questo modo si crea una entità; successivamente il ricordo di questa sensazione suscita nel soggetto un'altra sensazione e si genera la bi-unità. Il passaggio da una sensazione alla successiva avviene nel tempo e grazie alla memoria. Dall'iterazione di questo processo nascono i numeri naturali. Scrive Brouwer: "This neo-intuitionism considers the falling apart of moments of life into qualitatively different parts, to be reunited only while remaining separated by time as the fundamental phenomenon of the human intellect, passing by abstracting from its emotional content into the fundamental phenomenon of mathematical thinking, the intuition of the bare two-oneness. This intuition of the two-oneness, the basal intuition of mathematics, creates not only the numbers one and two, but also all finite ordinal numbers, inasmuch as one of the elements of the two-oneness may be thought of as a new two-oneness, which process may be repeated indefinitely; this gives rise still further to the smallest infinite ordinal number ω. [..] The intuitionist recognizes only the existence of denumerable sets, i.e., sets whose elements may be brought into one-to-one correspondence either with the elements of a finite ordinal number or with those of the infinite ordinal number ω"[2]. E ancora: "Prima di tutto bisogna descrivere le fasi che la coscienza deve attraversare nella transizione dalla sua dimora più

[1] Citato in [Borga - Palladino 1997], pag. 120
[2] [Brouwer 1912], pagg.

profonda al mondo esterno, nel quale cooperiamo e cerchiamo di intenderci. La *coscienza* nella sua dimora più profonda oscilla lentamente, involontariamente e reversibilmente tra uno stato di quiete e uno stato di sensazione. Solo lo stato di sensazione consente il fenomeno iniziale della suddetta transizione. Il fenomeno iniziale è un passaggio di tempo. Con un passaggio di tempo una sensazione cede il posto ad un'altra, in modo che la coscienza conserva la prima come una sensazione passata e, inoltre, attraverso la distinzione tra presente e passato, si allontana da entrambe e dallo stato di quiete per diventare mente. La matematica nasce quando la bi-unità creata da un passaggio di tempo viene privata dal soggetto di ogni qualità, e quando si lascia espandere senza limiti la risultante forma vuota del sostrato comune di tutte le bi-unità (l'intuizione base della matematica), creando nuove unità matematiche sotto forma di *successioni infinite che proseguono in modo prefissato oppure più o meno liberamente* di entità matematiche già acquisite"[1].

L'intuizionismo non rimase semplicemente una corrente filosofica o una critica alla matematica classica: Brouwer e Heyting costruirono una nuova matematica, a partire dalla logica, dall'aritmetica e dall'analisi, che non può essere considerata un semplice sottinsieme della matematica classica. Una esposizione completa della matematica intuizionista risulterebbe qui fuorviante, ma è comunque importante sottolineare come ogni qual volta essa parli di infinito lo faccia in termini potenziali. Ad esempio: la costruzione dei numeri naturali richiama il processo potenziale delle citazioni sopra riportate; quando si parla di successioni si pensa a un procedimento che ha luogo nel tempo caratterizzato da scelte successive; invece di parlare di insieme (inteso come la totalità degli elementi che gli appartengono), si parla di spiegamento (con riferimento al fatto che i suoi elementi sono generati da una certa legge uno dopo l'altro nel tempo)[2]; la costruzione dei reali infine evita

[1] Brouwer, in "Consciousness, philosophy and mathematics", comunicazione al X congresso internazionale di filosofia, tenutosi ad Amsterdam nel 1948, citato in [Heyting 1958], pagg. 249 e 250

[2] Scrive Heyting: "Dal punto di vista classico la definizione di un insieme isola una certa parte di un numero preesistente di oggetti. In questo senso l'insieme è posteriore ai suoi elementi. Tale concezione è del tutto opposta a quella intuizionista. Una specie S non è altro che la proprietà S in base a cui è definita. Se si può dimostrare che un oggetto matematico A, definito indipendentemente dalla specie, ha la proprietà S, si dice che A appartiene a S, o che A è un elemento di S. Questa terminologia, scelta in conformità con l'uso comune, non intende affatto suggerire che si può considerare S come la collezione dei suoi elementi. La specie e i suoi elementi sono definiti indipendentemente tra loro; dopo si può stabilire che un certo oggetto appartiene a una certa specie. Gli spiegamenti sono specie di tipo particolare: i loro elementi sono generati in un modo comune, poiché nella definizione di uno spiegamento è compreso un metodo di formazione dei suoi elementi. Tuttavia la definizione dello spiegamento non definisce alcun particolare elemento" (in [Heyting

completamente l’infinito in atto presente delle definizioni classiche, con il risultato che l’analisi intuizionista dimostra teoremi veramente sorprendenti per il matematico classico[3].

1958], pag. 254).

[3] Ad esempio, nell’analisi intuizionista si dimostra che ogni funzione ovunque definita è continua e che ogni funzione definita in un intervallo chiuso è ivi uniformemente continua.