2.1. Significato

Scrive Cantor: “Per ciò che concerne l’infinito matematico, nella misura in cui ha trovato fino ad oggi uso legittimo nella scienza e ha contribuito al suo progresso, mi sembra che in primo luogo esso si presenti col significato di una grandezza variabile, che cresce al di là di ogni limite o che diventa tanto piccola quanto si vuole, ma sempre rimanendo finita. Chiamo questo infinito, infinito improprio”[1]. Quello potenziale, dunque, per Cantor non è propriamente un vero infinito, bensì semplicemente una quantità finita che varia e che può crescere o decrescere oltre ogni limite prefissato. Fin qui nulla di diverso da quanto ritenevano i sostenitori dell’infinito potenziale, ma Cantor va oltre e ammette (anche alla luce degli sviluppi della matematica del suo tempo) l’esistenza di un altro infinito, che egli definisce proprio e che richiama, nella terminologia filosofica, l’infinito attuale.

Ma in che cosa consiste questa attualità? Essa innanzitutto rispecchia l’idea di perfezione e di totalità completa: non si vuole tanto avere a che fare con una quantità che può essere via via ingrandita (o rimpicciolita), ma con quella che è già di per sé più grande (più piccola) di ogni quantità finita; non si tratta di considerare un insieme cui può sempre essere aggiunto qualche elemento, bensì quello che li comprende tutti.

Parlare dell’infinito in atto implica inoltre l’idea che esistano entità infinite e che la mente dell’uomo possa ad esse pensare. Durante il medioevo cristiano, non poteva negarsi l’infinità di Dio: per alcuni filosofi da tale infinità in atto scaturiva necessariamente l’esistenza di altre entità infinite; per altri (la maggior parte) l’infinità poteva essere attribuita solo a Dio, e non ad altri enti, di qualsiasi natura essi fossero (empirica, psicologica o puramente astratta). Tra coloro che ammettevano l’esistenza di entità attualmente infinite distinte da Dio (anche se proprio grazie a Dio) spicca Sant’Agostino. Egli scrive: “Riguardo poi all’altra loro teoria che neanche con la scienza di Dio può essere rappresentato l’infinito, rimane loro che osino affermare, immergendosi nell’abisso profondo della irreligiosità, che Dio non conosce il tutto del numero. [...] Dio dunque non conoscerebbe a causa dell’infinità l’intero dei numeri e la sua scienza arriverebbe fino a una certa quantità numerica e ignorerebbe il resto? Non lo potrebbe dire neanche il più

[1] [Cantor 1879 - 1884], articolo numero 5, paragrafo 1

insensato. [...] Dunque l'infinità del numero, quantunque non si dia calcolo numerico dell'infinito, può essere oggetto di conoscenza unificante per colui, la cui intelligenza non si può calcolare col numero. Pertanto se l'oggetto di una rappresentazione unificante mediante scienza ha finitezza nella rappresentazione del soggetto, certamente ogni infinità in un modo ineffabile a Dio è finita, perché per la sua scienza è oggetto rappresentabile. Dunque se l'infinità del numero non può essere infinita per la scienza di Dio che se la rappresenta come oggetto, che razza di omucci siamo noi che pretendiamo di porre limiti alla sua scienza?"[1]. La totalità degli infiniti numeri interi è dunque, per Agostino, pensabile e logicamente possibile, perché è conosciuta dalla mente divina, cui non si può imporre di arrestarsi ad un numero finito. È interessante, anche a proposito di quanto si dirà poi sulla definitezza dell'infinito in atto, come Agostino risolva il problema della conoscibilità dell'infinito: esso diventa, per Dio, finito, oggetto delimitato e rappresentato nella sua mente. Rimane comunque un problema: se la mente infinita di Dio conosce l'infinito, non è detto che ciò sia possibile anche per quella dell'uomo, solitamente ritenuta finita. È particolarmente interessante a questo proposito la tesi sostenuta da Cantor: "La parola 'intelletto finito', che tante volte si sente dire, non è in alcun modo corretta a mio giudizio: anche la natura umana a dire il vero è limitata in modo che sotto vari aspetti l'infinito le è innato; con ciò voglio dire che se essa non fosse infinita in molte relazioni la solida sicurezza e certezza rispetto all'essere dell'assoluto, su cui tutti concordiamo, non sarebbe spiegabile. Inoltre sono per la tesi che l'intelletto umano abbia una capacità illimitata di costruire pezzo per pezzo l'edificio delle classi numeriche degli interi, che stanno in relazione ben precisa con i 'modi' infiniti e le cui potenze sono sempre più grandi"[2].

L'ultima caratteristica rilevante, e apparentemente paradossale, dell'infinito attuale è la sua definitezza: gli enti matematici infiniti vengono determinati in modo preciso, alla pari di quelli finiti e obbediscono a proprietà formali ben individuate, anche se distinte da quelle valide al finito. L'απειρον rimane qui ad indicare solo illimitatezza e non più indefinitezza o ineffabilità; esso non ha più quella natura "ambigua e refrattaria ad ogni accostamento e tentativo di comprensione"[3] che poteva avere per la filosofia greca. Scrive ancora Cantor:

[1] [Agostino], pag. 193
[2] [Cantor 1879 - 1884], articolo numero 5, paragrafo 5
[3] [Zellini 1980], pag. 12

“La mia concezione delle grandezze definibili non si conclude con quelle finite e i limiti della nostra conoscenza possono essere corrispondentemente ampliati, senza che sia necessario fare in alcun modo forza alla nostra natura”[1].

[1] [Cantor 1879 - 1884], articolo numero 5, paragrafo 5

2.2. Esempi

2.2.1. La concezione di infinito nell'opera di Georg Cantor

Alcune premesse

Quando Cantor iniziò a parlare in termini di infinito attuale e a presentare la sua teoria dei numeri transfiniti iniziò un cammino su un terreno quasi inesplorato e fino ad allora spesso con cura evitato anche dai grandi pensatori del mondo occidentale. Ciò è testimoniato, tra l'altro, dal fatto che ad un certo punto egli entrò in conflitto con i maggiori esponenti dell'ambiente matematico dell'epoca[1]. Egli però non fu in assoluto il primo a sentire l'esigenza di introdurre l'uso di questo tipo di infinito; nelle sue opere Cantor stesso cita ad esempio Leibniz: "Sono talmente per l'infinito attuale, che invece di ammettere che la natura lo aborra, come si dice ordinariamente, io penso che lo ostenti ovunque, per meglio sottolineare la perfezione del suo autore. Credo anche che non vi sia alcuna parte della materia che non sia, non dico divisibile, ma attualmente divisa; e di conseguenza la più piccola particella deve essere considerata come un mondo pieno di un'infinità di creature divise"[2]. È interessante allora cercare alcuni precursori di Cantor, non solo tra i filosofi, quantomeno per cogliere quali aspetti della sua teoria sono frutto della "maturazione dei tempi" e quali sono invece frutto del suo genio matematico.

<u>*Il paradosso di Galileo*</u>

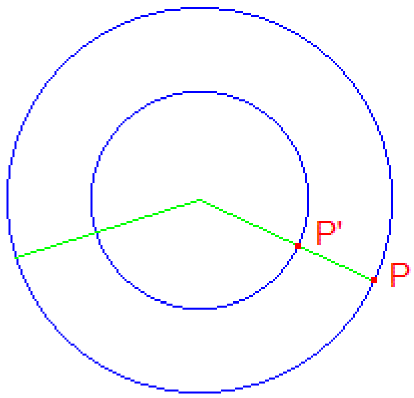
Diverse furono le occasioni e i motivi che portarono Galileo Galilei (1564 - 1642) a riflettere e a parlare dell'infinito: considerazioni di carattere geometrico e aritmetico, ma anche problemi di cinematica. Importanti a riguardo della concezione attuale dell'infinito

[1] "Le idee di Cantor erano così sconvolgenti e controintuitive per i suoi contemporanei che il matematico francese Henrì Poincaré (1854 - 1912) condannò la teoria dei numeri transfiniti come una 'malattia' da cui un giorno la matematica sarebbe stata curata. Leopold Kroneker (1823 - 1891), uno dei maestri di Cantor e grande esponente dell'*establishment* matematico tedesco, arrivò al punto di attaccare Cantor personalmente, definendolo addirittura un 'ciarlatano scientifico', un 'rinnegato' e un 'corruttore della gioventù'." ([Dauben 1983], pag. 44)

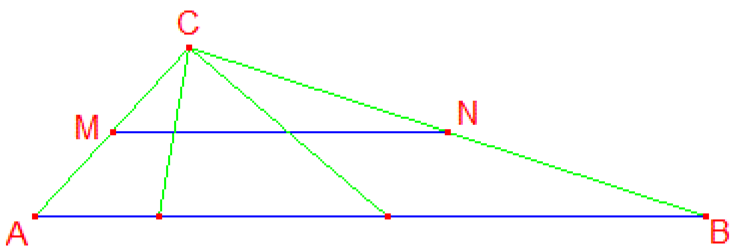
[2] Citato in [Cantor 1879 - 1884], articolo numero 5, paragrafo 7

furono i lavori di Galileo sugli infinitesimi, ma ciò che più ha a che fare con la futura teoria dei numeri infiniti sono alcune questioni geometriche e aritmetiche che parevano paradossali, se confrontate con la già analizzata ottava nozione comune del primo libro degli Elementi di Euclide: "Il tutto è maggiore della parte".

Galileo[1] considera come primo esempio due circonferenze concentriche di raggio una il doppio dell'altra: poiché quella di raggio maggiore è lunga il doppio della minore, allora la prima dovrebbe contenere un numero di punti doppio rispetto a quelli contenuti nella seconda. Eppure, tracciando i raggi delle due circonferenze si può vedere come ad ogni punto P sulla circonferenza più grande corrisponda un solo punto P' sull'altra, e viceversa: sembra quindi di poter concludere che le due circonferenze abbiano lo stesso numero di punti.



Un altro esempio di grandezze geometriche che entrano in collisione con il postulato citato è costituito da segmenti di retta: si consideri un triangolo ABC; siano M e N i punti medi rispettivamente dei lati AC e BC: congiungendo i punti di AB con il vertice C ed intersecando con MN, ci si accorge che esiste una corrispondenza che associa biunivocamente i punti di AB con quelli di MN, contro il fatto che la lunghezza di AB è doppia rispetto a quella di MN.



[1] Cfr. [Galilei 1638], pag. 37

Galileo propone una soluzione di queste questioni in un modo decisamente curioso: egli sostiene che entrambe le circonferenze (e così pure entrambi i segmenti di retta) abbiano infiniti punti e che nella maggiore ci siano anche infiniti “vacui” interposti tra i punti: “così direi, ne i cerchi (che son poligoni di lati infiniti[1]) la linea passata da gl’infiniti lati del cerchio grande, continuamente disposti, esser pareggiata in lunghezza dalla linea passata da gl’infiniti lati del minore, ma da questi con l’interposizion d’altrettanti vacui tra essi; e sì come i lati non son quanti, ma bene infiniti, così gl’interposti vacui non son quanti, ma infiniti: quelli cioè infiniti punti tutti pieni; e questi, infiniti punti parte pieni e parte vacui”[2]. Galileo stesso è convinto che quella da lui proposta è una soluzione non priva di insidie: “Ci sono veramente coteste [difficoltà], e dell’altre: ma ricordiamoci che siamo tra gl’infiniti e gl’indivisibili, quelli incomprensibili dal nostro intelletto finito per la loro grandezza, e questi per la loro piccolezza. Con ciò veggiamo che l’umano discorso non vuol rimanersi dall’aggirarsegli attorno”[3]. E ancora: “L’infinito è per sé solo da noi incomprensibile, come anco gli indivisibili; or pensate quel che saranno congiunti insieme: e pur se vogliamo compor la linea di punti indivisibili, bisogna fargli infiniti; e così conviene apprender nel medesimo tempo l’infinito e l’indivisibile”[4].

Fin qui è chiaro come Galileo non volesse rinunciare a parlare di infinito in atto, ma contemporaneamente ritenesse di non avere gli strumenti per comprendere fino in fondo l’infinito e gli infinitesimi. Ciò di cui il Pisano si rende conto è che le proprietà degli insiemi finiti non possono essere automaticamente estese a quelli infiniti e che gli strumenti di indagine dei primi non possono essere uguali a quelli dei secondi: se gli insiemi infiniti non si comportano in tutto e per tutto come quelli finiti, ciò non implica che la nozione di infinito sia incoerente. In particolare: se un insieme non obbedisce all’ottavo assioma, ciò non vuol necessariamente dire che la sua esistenza sia contraddittoria, bensì può anche succedere che esso esista ma, semplicemente, non sia finito. Scrive Galileo: “Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro

[1] Una concezione attuale dell’infinito traspare anche da questo considerare la circonferenza come poligono di infiniti lati: siamo evidentemente in una posizione antitetica rispetto a quella implicita nel metodo di esaustione utilizzato negli Elementi di Euclide.
[2] [Galilei 1638], pag. 37
[3] [Galilei 1638], pag. 38
[4] [Galilei 1638], pag. 42

intelletto finito intorno a gl’infiniti, dandogli quelli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed egualità non convenghino a gl’infiniti, de i quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o eguale all’altro”[1]. A prova di questa affermazione egli presenta un problema non più geometrico, bensì riferito all’aritmetica, noto come *paradosso di Galileo*. Il paradosso è dato dal fatto che da un lato l’insieme dei quadrati perfetti è contenuto (direbbe Euclide: è una parte) in quello dei numeri naturali, dall’altro esiste una corrispondenza biunivoca tra i naturali e i loro quadrati:

1	2	3	**4**	5	6	7	8	**9**	10	11	12	13	14	15	**16**	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**	**100**	**121**	**144**	**169**	**196**	**225**	**256**	...

Galileo termina il ragionamento in questo modo: “Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de’ quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggiore di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl’infiniti, ma solo nelle quantità terminate”[2].

Queste considerazioni di Galileo sono importanti non solo per la conclusione cui portano (e cioè che gli strumenti per trattare finito ed infinito devono essere distinti), ma anche per come vi arrivano: per affermare che i quadrati perfetti sono tanti quanti i numeri naturali egli esibisce una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi, cosa che troverà un uso fecondo in Bolzano, Dedekind e Cantor oltre due secoli più tardi.

“I paradossi dell’infinito” di Bolzano

Nel 1851, a circa quattro anni dalla loro stesura, furono pubblicati postumi i *Paradoxien des Unendlichen* di Bernard Bolzano (1781 - 1848). In essi appare fortemente la convinzione dell’esistenza dell’infinito in atto, convinzione che ha le sue basi su motivazioni sia filosofiche che matematiche, ma che fa emergere problemi la cui discussione viene affrontata da Bolzano su un terreno completamente matematico.

[1] [Galilei 1638], pag. 43
[2] [Galilei 1638], pag. 45

Nelle prime righe del testo, l'autore motiva innanzitutto la scelta di dedicare un volume ai paradossi dell'infinito: "Le affermazioni paradossali che si incontrano in matematica sono certamente per la maggior parte [...] proposizioni che contengono o in modo immediato il concetto di *infinito*, o si fondano in qualche modo su tale concetto attraverso la dimostrazione per esse proposta. Ancor meno discutibile è il fatto che tale categoria di paradossi matematici includa precisamente quelli che meritano il nostro esame più accurato, in quanto la soluzione di problemi molto importanti di altre scienze, come la fisica e la metafisica, dipende da una soddisfacente confutazione delle loro apparenti contraddizioni"[1]. È allora chiaro fin da subito che Bolzano intende risolvere i paradossi in proposizioni non contraddittorie, e dunque che crede che il concetto di infinito attuale, una volta chiarito, sia completamente accettabile in matematica e nelle altre discipline.

I primi paragrafi sono dedicati a precisare che cosa l'autore intenda per infinito e a criticare alcune concezioni che egli ritiene erronee. La definizione che Bolzano dà è la seguente: "Chiamerò *molteplicità infinita* una molteplicità[2] che è più grande di ogni molteplicità finita, cioè una molteplicità tale che ogni insieme finito ne rappresenti solo una parte"[3].

Nel tredicesimo paragrafo viene dimostrata l'esistenza di due insiemi infiniti: l'insieme delle proposizioni e quello delle verità in sé: "Se infatti consideriamo una verità qualsiasi, ad esempio la proposizione che vi sono in generale delle verità[4], oppure un'altra proposizione qualsiasi che indichiamo con A[5], troviamo che la proposizione espressa dalle parole 'A è vera' è distinta dalla proposizione A stessa, in quanto ha evidentemente un soggetto diverso dal soggetto di A. Ora, per la stessa legge che ci ha permesso di derivare dalla proposizione A quest'altra proposizione diversa, che chiameremo B, si può a sua

[1] [Bolzano 1848], pag. 1

[2] La nozione di insieme di Bolzano è diversa da quella che sarà adottata da Cantor (e, ovviamente, diversa da quella attuale). Egli distingue tra insieme (Menge), aggregato (Inbegriff), molteplicità (Vielheit) e somma (Somme). La spiegazione di questi termini è data nei primi paragrafi dei *Paradoxien des Unendlichen*, ma non risulta rilevante per il resto del discorso.

[3] [Bolzano 1848], pag. 5

[4] Qui Bolzano non esplicita il ragionamento fatto per dimostrare l'esistenza di almeno una proposizione vera. L'argomentazione che si può usare è la stessa che utilizzavano gli stoici contro gli scettici: se tutte le proposizioni fossero false, allora lo sarebbe anche quella che dice: "tutte le proposizioni sono false". La contraddizione è evidente e dunque esiste almeno una proposizione vera.

[5] Se la proposizione A è vera, allora tutte quelle che vengono di seguito enunciate sono vere; se A non è vera, ciò non si verifica più. Nel primo caso l'insieme che si costruisce è composto di verità in sé, nel secondo semplicemente da proposizioni. Ad ogni modo, quello che conta per il ragionamento che Bolzano qui conduce non è il valore di verità delle proposizioni, bensì il fatto che esse sono tutte una distinta dall'altra.

volta derivare da B una terza proposizione C, e così via senza fine[1]. L'aggregato di tutte queste proposizioni, ognuna delle quali è legata alla precedente dalla relazione testé enunciata, di avere come proprio soggetto la stessa proposizione precedente e come proprio contenuto la asserzione che tale proposizione è vera, comprende un insieme di elementi (proposizioni) che è maggiore di ogni insieme finito. Infatti il lettore avrà senz'altro rimarcato l'analogia tra la successione di queste proposizioni, per quel che riguarda il principio di formazione or ora specificato, e la *successione dei numeri* [...]: analogia consistente nel fatto che per ciascun termine di quest'ultima esiste un termine corrispondente della prima, e che quindi per qualsiasi numero quantosivoglia grande esiste un numero uguale di proposizioni distinte; e che possiamo sempre continuare la costruzione di nuove proposizioni, o, per meglio esprimersi, che esse esistono di per sé stesse, che noi le costruiamo o no. Ne consegue che l'aggregato di tutte queste proposizioni possiede una molteplicità che è maggiore di qualsiasi numero, e che è quindi infinita"[2].

In questo modo Bolzano ha dimostrato l'esistenza, "almeno tra quelle cose che non possiedono realtà effettiva"[3], di un insieme infinito.

Nel venticinquesimo paragrafo affermerà che "si dà un infinito [...] *anche nello stesso ambito della realtà*"[4]; ciò è ricavato da Bolzano dall'esistenza di Dio che "*conosce in maniera infinita*, [...] vuole *in maniera infinita*, [..] *fa esistere*, in virtù del suo potere di azione verso l'esterno, *qualsiasi cosa voglia*. Da questo ultimo attributo di Dio consegue l'esistenza di esseri oltre a lui, cioè di *creature*, che noi, contrapponendoli a lui, chiamiamo *esseri finiti*, ma nei quali si possono purtuttavia ritrovare molteplici infinità"[5].

Nel ventesimo paragrafo Bolzano enuncia una proprietà fondamentale degli insiemi infiniti: "Due insiemi, che siano entrambi infiniti, possono essere in una siffatta relazione reciproca, che *in primo luogo* è possibile formare delle coppie di ogni cosa appartenente ad un insieme con una dell'altro in modo tale che nessuna cosa dell'uno o dell'altro insieme non compaia in almeno una coppia, e che anche nessuna compaia in due o più coppie; *in*

[1] Le proposizioni che vengono così ad essere formulate sono: A, 'A è vera', ''A è vera' è vera', '''A è vera' è vera' è vera', e così via.
[2] [Bolzano 1848], pagg. 12 e 13
[3] [Bolzano 1848], pag. 19
[4] [Bolzano 1848], pag. 32
[5] [Bolzano 1848], pag. 33

secondo luogo, è nello stesso tempo possibile che uno dei due insiemi contenga l'altro come una semplice parte"[1]. Può dunque esistere una biezione tra un insieme infinito e una sua parte propria (a sua volta infinita). Di fatto questa biezione esiste anche tra l'insieme A, 'A è vera', ''A è vera' è vera', '''A è vera' è vera' è vera', e così via e l'insieme 'A è vera', ''A è vera' è vera', '''A è vera' è vera' è vera', ''''A è vera' è vera' è vera' è vera' e così via: si tratta di quella relazione che ad ogni proposizione P del primo insieme associa la proposizione 'P è vera' del secondo. È attraverso l'esistenza e il riconoscimento di queste biezioni che Bolzano riesce a parlare di insiemi infiniti come di entità completamente determinate, a pensare ad un calcolo dell'infinito, a non smarrirsi di fronte all'impossibilità di enumerare uno per uno, separatamente, tutti i componenti di un insieme infinito (e analogamente riconoscerà per ogni serie numerica che non sono gli infiniti suoi termini contati uno per uno ad individuarla, bensì la loro legge di formazione).

Nel paragrafo ventottesimo Bolzano mostra come si possa concepire un calcolo dell'infinito; bisogna notare che in realtà egli, in tutti gli esempi che riporta successivamente, non confronta insiemi di cardinalità diverse, nel senso che a queste parole attribuirà Cantor: semplicemente considera insiemi infiniti e loro parti proprie pure infinite, tutti però numerabili.

Non si può tuttavia non riconoscere a Bolzano di aver in qualche modo 'esorcizzato' l'infinito dagli spettri che lo rendevano incontrollabile, di avergli dato una caratterizzazione puramente matematica e razionale, liberata dalla pesantezza delle evocazioni e delle analogie con l'infinito in senso metafisico, filosofico, teologico...[2]. "Già la sola *idea* di un *calcolo dell'infinito* sembra - ne convengo - contenere una contraddizione. Voler *calcolare* alcunché significa, infatti, cercarne una *determinazione* mediante un numero. Ma come si può voler cercare di determinare l'infinito per mezzo di un numero - quell'infinito che secondo la nostra stessa definizione deve sempre essere qualcosa concepibile come un insieme costituito da un numero infinito di elementi, come un insieme cioè maggiore di qualsiasi numero e quindi non suscettibile di venir determinato da una semplice attribuzione numerica? Questa difficoltà però scompare

---

[1] [Bolzano 1848], pagg. 25 e 26

[2] È interessante il commento che fa Zellini (cfr. [Zellini 1980], pagg. 188 - 195), anche alla luce di quanto Bolzano esprime nella *Wissenschaftslehre* del 1837, su come egli "esorcizza" e "devitalizza" l'infinito.

quando si rifletta che un calcolo dell'infinito correttamente condotto non tende ad un computo di ciò che in esso appunto non è determinabile per mezzo di alcun numero, non tende cioè al computo della molteplicità infinita in se stessa, ma tende soltanto a una determinazione del rapporto tra un infinito e un altro"[1].

La definizione di insieme infinito di Dedekind

Il nome di J. W. Richard Dedekind (1831-1916) è per diversi motivi associato alla problematica dell'infinito. Uno di questi è sicuramente il modo con cui egli ha definito i numeri reali come sezioni di numeri razionali; rimandando questo tema ad un successivo paragrafo, si pone l'attenzione ora, molto brevemente, sulla famosa caratterizzazione che egli ha dato per gli insiemi infiniti.

In *Was sind und was sollen die Zahlen*, del 1887, Dedekind chiama infinito un insieme che possa essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria. Ciò che, nei secoli precedenti, era stato considerato un paradosso ed era servito come prova della non esistenza dell'infinito diventa con Dedekind non solo una caratteristica degli insiemi infiniti (come era in qualche modo già stato messo in luce da Galileo e da Bolzano), bensì addirittura il contenuto essenziale della loro definizione:

"21. Definizione: Per *rappresentazione* φ di un sistema S s'intende una legge, la quale faccia corrispondere ad ogni dato elemento s di S un oggetto determinato. Quest'oggetto si dice l'*immagine* di s e si designa con φ(s). [...] Per comodità indicheremo [...] le immagini degli elementi s delle parti T corrispondentemente con s' e T' [...].

26. Definizione: Una rappresentazione φ di un sistema S si dice *simile*, quando a elementi distinti a, b del sistema S corrispondono sempre immagini distinte a'= φ(a), b'= φ(b). Siccome in questo caso da s'= t' segue sempre inversamente s = t, ogni elemento del sistema S'= φ(S) è l'immagine s' di un unico ben determinato elemento s del sistema S. Si può perciò considerare insieme con la rappresentazione φ di S, una rappresentazione *inversa* del sistema S' che indicheremo con $\overline{\varphi}$ e che consiste nel far corrispondere ad ogni

[1] [Bolzano 1848], pagg. 39 e 40

elemento s' di S' l'immagine $\overline{\varphi}$(s') = s. La rappresentazione $\overline{\varphi}$ è evidentemente simile anch'essa. [...]

32. Definizione: I sistemi R, S si dicono simili se esiste una rappresentazione simile φ di S, per la quale si abbia φ(S) = R [quindi anche $\overline{\varphi}$(R) = S]. [...]

64. Definizione[1]: Un sistema S si dice *infinito* se esso è simile ad una sua parte propria; nel caso contrario S si dice un sistema *finito*."[2]

Una prima osservazione che si può fare è che, seguendo Dedekind, l'insieme infinito è definito "positivamente", mentre quello finito risulta essere definito di conseguenza come "non infinito" (cioè tale che non esiste una biettività tra esso ed una qualunque delle sue parti proprie). Questo atteggiamento è sintomatico del fatto che in matematica è problematico non solo parlare dell'infinito, bensì anche del finito: anche questo non è poi un concetto così facilmente precisabile o evidente. L'importanza della definizione di insieme finito di Dedekind sta nel fatto che essa risulta essere indipendente dal concetto di numero naturale (non si parla cioè della numerosità dell'insieme, ovvero non si dice che deve esistere un numero naturale che "conti" i suoi elementi). In tal modo, inoltre, potrebbero esserci insiemi di cui è davvero banale dimostrare l'infinità (basta mostrare la funzione che realizza la biezione voluta) ed altri di cui invece risulta arduo dimostrare la finitezza (a priori infatti si dovrebbero considerare tutte le parti proprie dell'insieme e tutte le possibili funzioni dall'insieme stesso in esse per far poi vedere che nessuna è biettiva).

Ritornando alla definizione di insieme infinito, è chiaro che essa lascia spazio ad una concezione completamente attuale: per stabilire l'infinità dei numeri naturali, ad esempio, non è più necessario farne l'elenco (operazione che poteva essere considerata solo in senso potenziale), bensì basta mostrare la funzione biettiva che, per esempio, manda ogni numero naturale nel suo quadrato. L'infinito è tutto contenuto in questa legge, che è istantaneamente data nella sua interezza e che non ha bisogno di essere messa all'opera in successione su tutti gli elementi dell'insieme di partenza perché risulti ben definita.

[1] Annota a questo punto lo stesso Dedekind: "Se si vuole fare a meno della nozione di sistemi simili allora bisogna dire: S è infinito se esiste una parte propria di S sopra cui S può essere rappresentato con similitudine. Sotto questa forma la definizione dell'infinito, che costituisce il punto fondamentale di tutta la mia ricerca, è stata da me comunicata nel settembre 1882 al sig. G. Cantor e ancora molti anni prima ai signori Schwarz e Weber. Tutti gli altri tentativi a me noti di distinguere l'infinito dal finito mi sembrano così poco felici che io credo di poterne lasciar da parte la critica" ([Dedekind 1887], pag. 51)

[2] [Dedekind 1887], pagg. 34 - 51

La teoria dei numeri transfiniti di Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918) è indubbiamente il primo a dare all'idea di infinito attuale una sistemazione rigorosa di contenuto prettamente matematico, anche se egli stesso riconosce i germi di una teoria dei numeri infiniti nei *Paradoxien des Unendlichen* di Bolzano di cui si è ampiamente discusso[1].
Nelle prossime righe si cercherà di avvicinare la teoria di Cantor, riottenendo anche alcuni risultati particolari, per coglierne in tutta la sua portata l'originalità. Inizialmente si abbraccerà, per la presentazione dei lavori di Cantor, un criterio cronologico, al fine di capire le motivazioni che lo sospinsero a fissare la propria attenzione sui problemi connessi con l'infinito; tale criterio verrà poi abbandonato, per dare spazio alla teoria dei numeri cardinali ed ordinali transfiniti nella sua formulazione definitiva.

Sull'estensione di un teorema della teoria delle serie trigonometriche

Cantor inizia le proprie ricerche presso l'Università di Halle: stimolato dal suo collega H. E. Heine (1821 -1881) si dedica ad un importante problema relativo agli sviluppi delle funzioni in serie trigonometriche. J. B. J. Fourier (1768 -1830) nel 1822 aveva dimostrato che il grafico di qualunque curva "ragionevolmente regolare" (ossia continua o con un numero finito di discontinuità) può essere ottenuto, in un intervallo, dalla sovrapposizione di un numero infinito di funzioni trigonometriche. Il risultato di Fourier non garantiva però l'unicità della serie trigonometrica convergente (tranne nei punti di discontinuità) alla funzione di partenza. Nel 1870 Cantor dimostra che se due serie

$$\frac{1}{2}b_0 + \sum_n (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)$$

[1] "Bolzano è forse l'unico presso di cui i numeri propriamente infiniti trovano diritto di cittadinanza, anche se il suo discorso è variamente articolato; concordo con lui per il modo con cui egli li utilizza [...]. Manca al nostro autore una concezione corretta dei numeri propriamente infiniti, della nozione di potenza e anche dell'idea di numero ordinale. Entrambi hanno qui il loro germe in punti singoli del suo lavoro, come casi particolari; a mio giudizio, egli non lavora però con piena chiarezza e precisione, il che spiega anche alcune incongruenze e veri e propri errori di questo lavoro pregevole." ([Cantor 1879 - 1884], articolo numero 5, paragrafo 7)

$$\frac{1}{2}b'_0+\sum_n\ (a'_n \operatorname{sen} nx + b'_n \cos nx)$$

convergono in un intervallo e hanno la stessa somma per tutti i valori degli x appartenenti a tale intervallo, allora hanno gli stessi coefficienti; poi estende questo risultato al caso in cui o la convergenza della serie o l'uguaglianza delle somme cessano di valere per un numero finito di valori di x. Nel 1872 Cantor generalizza ulteriormente questo risultato[1], mostrando che l'unicità continua a valere anche se la convergenza o l'uguaglianza cade per infiniti valori di x, purché opportunamente disposti nell'intervallo considerato. Per fare tale dimostrazione Cantor si trova a dover innanzitutto dare una definizione coerente dei *numeri reali* (e lo fa caratterizzando tali numeri come successioni di Cauchy di razionali[2]) ed inoltre introdurre la nozione di *insieme derivato*, come insieme dei punti limite (oggi detti punti di accumulazione) di un dato insieme[3] e di *insieme di specie v*[4]. Ebbene: Cantor dimostra che le due serie trigonometriche hanno gli stessi coefficienti anche quando la non convergenza o la disuguaglianza delle somme si verifichi per degli x che costituiscano un insieme di specie v (per un qualche v).

Il lavoro di Cantor del 1872 è importante sì per il risultato cui giunge, ma soprattutto poiché in esso sono presenti alcuni contributi riconosciuti fondamentali per i successivi sviluppi della matematica, e non solo per la teoria delle serie trigonometriche: la caratterizzazione dei numeri reali tramite successioni convergenti di razionali, l'introduzione di concetti topologici (come quello di punto di accumulazione e di insieme derivato) estremamente fecondi e l'emergere della consapevolezza dell'esistenza di

---

[1] Cfr. [Cantor 1972]

[2] Ogni reale è dunque per Cantor una successione $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ di razionali tale che, "per ogni ε razionale positivo, esista un intero n_1 tale che $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$ se $n > n_1$ ed m è un numero intero positivo qualsiasi". ([Cantor], pag. 93, tradotto in [Arzarello 1980], pag. 102)

[3] Scrive Cantor: "Per *punto limite* di un insieme di punti P, intendo un punto della retta, ogni intorno del quale contiene un numero infinito di punti del sistema P. [...] Chiamo *intorno* di un punto un qualsiasi intervallo che contiene il punto al suo interno. [...] È ora una condizione ben precisa di ogni punto della retta l'essere o meno punto limite di un dato insieme P di punti; quindi risulta correttamente definito, accanto all'insieme P, anche l'insieme dei suoi punti limite, che io chiamo *derivato primo* di P." ([Cantor], pag. 98, tradotto in [Arzarello 1980], pag. 103). Successivamente egli introduce induttivamente il *derivato di ordine* (k+1), indicato con $P^{(k+1)}$, come derivato primo di $P^{(k)}$.

[4] "Si può giungere, ed è questo il caso che in definitiva ci interessa, al fatto che dopo v operazioni l'insieme $P^{(v)}$ risulti composto da un numero finito di punti, non dando origine quindi ad alcun insieme derivato; in questo caso diciamo che l'insieme P da cui si è partiti è un *insieme di specie v*." ([Cantor], pag. 98, tradotto in [Arzarello 1980], pagg. 103 e 104).

gerarchie di infiniti diversi. È soprattutto quest'ultimo aspetto che risulta fondamentale per il nostro argomento: se dall'intervallo di partenza su cui risultano definite le due serie si possono escludere un'infinità di punti, purché quest'infinità sia di un tipo un po' particolare, significa che non tutti gli infiniti sono uguali.

La non numerabilità dell'insieme dei numeri reali

Uno dei primi problemi risolti da Cantor nell'ambito della esistenza di diversi infiniti riguarda i numeri naturali e i numeri reali: è possibile trovare una corrispondenza biunivoca tra questi due insiemi infiniti? Dedekind, con il quale Cantor tenne proficui contatti durante tutto il corso delle sue ricerche[1], aveva già proposto, nel 1872, l'idea che "la retta è infinitamente più ricca di punti-individui di quanto il dominio... dei numeri razionali sia ricco di numeri-individui"[2]. Cantor sollevò questo problema in maniera più precisa l'anno seguente proprio in una lettera a Dedekind e ne trovò anche la soluzione, che apparve nel 1874 in un articolo sul Giornale di Crelle[3]:

TEOREMA 1:

"Sia data una successione infinita di numeri reali diversi l'uno dall'altro che si succedono secondo una legge qualsiasi[4]:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots;$$

è possibile determinare in ogni intervallo prefissato $]\alpha, \beta[$ un numero η (e quindi un'infinità di tali numeri), che non appartiene alla successione[5].

DIMOSTRAZIONE 1.1:

Consideriamo pertanto l'intervallo dato $]\alpha, \beta[$ e sia $\alpha < \beta$.

Se nessuno dei numeri della successione è un elemento di $]\alpha, \beta[$, allora basta prendere $\eta = (\alpha+\beta)/2$, e dunque η sta nell'intervallo $]\alpha, \beta[$, ma non è un elemento della successione. Se invece esistono numeri della successione che cadono

[1] Cfr. l'epistolario [Cantor - Dedekind]
[2] Citato in [Dauben 1983], pag. 47
[3] Cfr. [Cantor 1874]
[4] Si tratta cioè di una funzione che va da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$.
[5] Questo teorema prova che una qualunque successione di numeri reali non può esaurire tutti i reali e quindi la non esistenza di una funzione biettiva da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$. Di conseguenza esistono almeno due infiniti diversi.

nell'intervallo considerato, allora si può trovare un $n \geq 1$ tale che $\omega_n \in\ ]\alpha, \beta[$, ma per ogni $p < n$, $\omega_p \notin]\alpha, \beta[$. Chiaramente se ω_n è l'unico elemento della successione che cade nell'intervallo, si trova il numero cercato ponendo $\eta = (\omega_n+\beta)/2$. Altrimenti esiste $m > n$ tale che $\omega_m \in\ ]\alpha, \beta[$, ma per ogni q con $n < q < m$, $\omega_q \notin]\alpha, \beta[$. Si pone $\alpha' = \min(\omega_n, \omega_m)$ e $\beta' = \max(\omega_n, \omega_m)$: essi sono quelli che Cantor chiama i primi due numeri, della successione data, che cadono all'interno dell'intervallo. Dalla costruzione si ha che $]\alpha', \beta'[\subseteq]\alpha, \beta[$ e $\omega_1 \notin]\alpha', \beta'[$.

Analogamente, indichiamo con α'', β'' i primi due numeri della succesione che cadono all'interno di $]\alpha', \beta'[$, costruiti come sopra, e sia $\alpha'' < \beta''$; con la stessa regola formiamo un intervallo successivo $]\alpha''', \beta'''[$ ecc. Gli α', α'', ... per definizione sono certi numeri determinati dalla nostra successione, con indici crescenti e lo stesso vale per i numeri β', β'', ...; inoltre gli α', α'', ... crescono e i β', β'', ... decrescono in grandezza; ogni intervallo $]\alpha, \beta[$, $]\alpha', \beta'[$,$]\alpha'', \beta''[$, ... contiene tutti quelli che seguono. Sono allora possibili due casi.

O il numero di intervalli così costruiti è finito; sia $]\alpha^{(v)}, \beta^{(v)}[$ l'ultimo; ma al suo interno può giacere al più un numero della successione data; quindi è possibile estrarre da questo intervallo un numero η, che non appartiene alla successione data e il teorema in questo caso è dimostrato. Infatti: se all'interno di $]\alpha^{(v)}, \beta^{(v)}[$ non giace alcun numero della successione data, allora basta prendere $\eta = (\alpha^{(v)}+\beta^{(v)})/2$; se invece in tale intervallo giace un numero ω_k della successione di partenza, allora basta prendere $\eta = (\alpha^{(v)}+\omega_k)/2$.

Oppure il numero di questi intervalli è infinito. Allora i numeri α, α', α'', ... hanno un certo punto limite α^∞, in quanto crescono sempre ma non all'infinito; in altre parole gli α, α', α'', ... costituiscono una successione crescente superiormente limitata (sicuramente, per esempio, da β). Analogamente i punti β, β', β'', ... che decrescono hanno un punto limite β^∞, in quanto i β, β', β'', ... costituiscono una successione decrescente inferiormente limitata (sicuramente, per esempio, da α). Se $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (caso che si presenta sempre nel caso dell'insieme di tutti i numeri algebrici reali[1]), ricordando la definizione degli intervalli, ci si assicura facilmente che il numero $\eta = \alpha^{\infty} = \beta^{\infty}$ non può far parte della nostra successione (se il numero η appartenesse alla nostra successione, si avrebbe $\eta = \omega_p$, con p un certo indice; ciò non è però possibile, in quanto ω_p non cade all'interno dell'intervallo $]\alpha^{(p)}, \beta^{(p)}[$, mentre il numero η per definizione appartiene all'interno di tale intervallo); se invece è $\alpha^{\infty} < \beta^{\infty}$, ogni numero η all'interno dell'intervallo $]\alpha^{\infty}, \beta^{\infty}[$ o coincidente con uno degli estremi soddisfa la condizione richiesta di non appartenere alla successione data"[2].

■

Una dimostrazione che Cantor stesso definisce "più semplice" di quella appena vista, è quella che egli presenta nel 1890[3], che non sfrutta più il metodo degli intervalli incapsulati, bensì quello della diagonalizzazione, metodo che si rivelerà assai proficuo anche in altri campi. Non riportiamo qui la dimostrazione originale di Cantor, ma ne diamo un'altra che segue però lo stesso spirito.

DIMOSTRAZIONE 1.2:

Sia $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ una successione di numeri reali distinti dell'intervallo $]0, 1[$. Ciascuno di questi numeri può essere scritto attraverso la sua rappresentazione decimale come una successione di cifre, la prima delle quali (quella delle unità) è 0. Poiché nessuno di questi ω_i è lo zero, tra le espressioni decimali non vi sarà quella composta da soli 0. Ora, per ogni numero ω_i si indichi con $s_i(j)$ la j-esima cifra del suo sviluppo decimale; si ha dunque

$$\begin{array}{llllll} \omega_1: & 0, & s_1(1) & s_1(2) & \ldots & s_1(n) & \ldots \\ \omega_2: & 0, & s_2(1) & s_2(2) & \ldots & s_2(n) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \omega_n: & 0, & s_n(1) & s_n(2) & \ldots & s_n(n) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Si consideri ora un nuovo numero

---

[1] Cantor era interessato a stabilire "quanti" fossero i numeri reali algebrici (ovvero quei numeri reali che sono radice di un polinomio a coefficienti interi, tra cui i razionali e quegli irrazionali che si possono esprimere mediante operazioni razionali e di estrazione di radice di qualsiasi indice). Egli dimostra che essi sono in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali: ciò prova che devono esistere anche dei numeri reali non algebrici, i cosiddetti trascendenti, riprendendo così il risultato di Liouville.

[2] [Cantor 1874], paragrafo 2, traduzione parziale in [Arzarello 1980], pagg. 207 e 208

[3] Cfr. [Cantor 1891]

$$\delta: \quad 0, \quad s(1) \quad s(2) \quad \ldots \quad s(n) \quad \ldots$$

le cui cifre decimali siano così definite:

$$s(m) = 8 \quad \text{se} \quad s_m(m) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$s(m) = 2 \quad \text{se} \quad s_m(m) \in \{6, 7, 8, 9\}.$$

In questo modo $\delta \in]0, 1[$. Si dimostra che δ non è un elemento della successione ω_1, ω_2, ..., ω_n, ...; infatti se fosse $\delta = \omega_h$ per un qualche numero naturale h, allora si presenterebbe uno dei seguenti due casi:

a) le espressioni decimali di δ e di ω_h coincidono, cioè per ogni numero naturale m si ha $s(m) = s_m(m)$, il che è manifestamente falso per come sono state definite le cifre di δ;

b) le espressioni decimali di δ e di ω_h coincidono fino ad una certa cifra (diciamo la k-esima), poi le (k+1)-esime cifre differiscono di una unità e le altre cifre dalla (k+2)-esima in poi sono tutte 0 per il reale con la (k+1)-esima cifra maggiore e tutte 9 per l'altro; in tal modo si avrebbe $|s(k) - s_k(k)| = 1$ il che è impossibile, poiché dalla definizione delle cifre di δ appare chiaramente che per ogni numero naturale m si ha $|s(m) - s_m(m)| > 2$.

Si è dunque dimostrato che non vi può essere una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e l'intervallo $]0, 1[$. Ora, si consideri la funzione f che manda ogni $x \in \mathbb{R}$ in

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2x - 1}{2\sqrt{4x^2 - 4x + 5}}.$$

Essa costituisce una biettività da $\mathbb{R}$ in $]0,1[$[1]. Risulta allora dimostrato che non c'è alcuna biezione che manda $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$; infatti se una tale biezione g esistesse, tenuto conto del fatto che la composizione di funzioni biettive è ancora una funzione biettiva, si avrebbe la biezione $f \circ g : \mathbb{N} \to]0, 1[$, contro quanto sopra dimostrato.

■

[1] La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$ in quanto $4x^2 - 4x + 5 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; inoltre si verifica che $0 < f(x) < 1$ sempre per ogni valore reale della x. Per verificare l'iniettività della f basta far vedere che se $f(a) = f(b)$ per qualche a e b reali, allora $a = b$. Per verificarne la suriettività si mostra che per ogni $y \in]0, 1[$ esiste un $x \in \mathbb{R}$ tale che $y = f(x)$.

La forza di questo teorema sta nel fatto che finalmente Cantor trova due insiemi numerici che hanno una potenza nettamente diversa. Già Bolzano nei suoi *Paradoxien des Unendlichen* aveva sostenuto l'esistenza di infiniti distinti, ma gli esempi che egli aveva riportato erano tutti di insiemi numerabili: egli presentò alcuni insiemi infiniti che costituivano parti proprie di altri, ma non trovò un insieme infinito che non potesse essere messo in corrispondenza biunivoca con quello dei numeri naturali. Cantor riconosce quest'insieme in $\mathbb{R}$ e mostra così che tra gli enti matematici comunemente accettati esistono almeno due tipi di infinito di natura completamente diversa.

<u>Equipotenza di linea e superficie</u>

Già nel 1874 Cantor pone a Dedekind il seguente problema: "È possibile che una superficie (per esempio un quadrato, frontiera compresa) possa essere messa in relazione univoca con una curva (per esempio, un segmento di retta, estremità comprese), in modo che a ogni punto della superficie corrisponda un punto della curva, e viceversa a ogni punto della curva un punto della superficie?"[1]. E finalmente, nel 1877, Cantor ottiene la dimostrazione del fatto che "le superficie, i volumi e anche le varietà continue a n dimensioni possono essere messe in corrispondenza 1 - 1 con curve continue, perciò con varietà a una sola dimensione e quindi che le superficie, i volumi, le varietà a n dimensioni hanno anche la stessa potenza delle curve; questa opinione sembrava contraria a quella generalmente diffusa, soprattutto tra i rappresentanti della nuova geometria, secondo la quale si parla di varietà infinite - una, due, tre, ... volte; ci si rappresentano ogni tanto le cose come se si ottenesse l'infinità dei punti di una superficie in qualche modo elevando al quadrato, quelli di un cubo elevando al cubo l'infinità dei punti di una linea"[2]. Tale modo di rappresentarsi le cose doveva in realtà essere tanto diffuso che Cantor stesso, messo di fronte alla propria dimostrazione, dirà "Lo vedo, ma non lo credo"[3].

---

[1] [Cantor - Dedekind], lettera di Cantor a Dedekind del 5 gennaio 1874, parzialmente tradotta in [Arzarello 1980], pag. 209
[2] [Cantor - Dedekind], lettera di Cantor a Dedekind del 20 giugno 1877, parzialmente tradotta in [Arzarello 1980], pagg. 66 e 67
[3] [Cantor - Dedekind], lettera di Cantor a Dedekind parzialmente tradotta in [Borga - Palladino 1997], pag. 49

La pubblicazione dei risultati di Cantor avviene nel 1878, ancora una volta sul Giornale di Crelle[1]; in tale articolo egli dimostra il seguente

TEOREMA 2:

esiste una corrispondenza biunivoca tra l'intervallo reale $[0, 1]$ e $\{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid \forall m \in \mathbb{N}$, con $1 \leq m \leq n$, si abbia $x_m \in [0, 1]\}$, qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}$; da ciò si deriva immediatamente che esiste una biettività tra una varietà continua a n dimensioni e una varietà continua a una sola dimensione.

DIMOSTRAZIONE:

1. La prima parte della dimostrazione consiste nel far vedere che l'insieme

$$I = \{x \in]0, 1[\mid x \text{ è irrazionale}\}$$

può essere messo in corrispondenza biunivoca con I^n, qualsiasi sia il numero naturale n fissato. Per dimostrare ciò Cantor sfrutta innanzitutto il fatto che ogni numero irrazionale e, tale che $0 < e < 1$, può essere rappresentato in forma di una "frazione continua infinita" nel seguente modo:

$$e = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \dots}}}$$

dove gli α_i sono numeri interi positivi. Risulta in questo modo determinata una corrispondenza biunivoca tra l'insieme I e l'insieme delle successioni infinite di interi positivi, precisamente quella che ad ogni numero e associa la successione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...)$ individuata come sopra. Ora, fissato n, si considerino n elementi di I, diciamo $e_1, e_2, ..., e_n$. Essi determinano univocamente n successioni infinite di interi positivi:

$$\begin{array}{ll} e_1: & (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, ...) \\ e_2: & (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, ...) \\ \vdots & \quad\vdots \\ e_n: & (\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, ...) \end{array}$$

Tali successioni a loro volta determinano univocamente un $(n+1)$-esimo numero $d \in I$:

[1] Cfr. [Cantor 1878]; l'enunciato e la dimostrazione del teorema seguente rispecchiano quelli originali di Cantor, ma si sono utilizzate notazioni più esplicitamente insiemistiche.

$$d: \qquad (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots)$$

tale che

$$\beta_{(j-1)n+i} = \alpha_{ij} \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{e} \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Viceversa, dato $d \in I$, esso univocamente determina la successione $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots)$, dunque la tabella degli α_{ij} e di conseguenza la n-upla $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ di I^n. Risulta allora dimostrato che I e I^n sono in corrispondenza biunivoca, ovvero hanno la stessa *potenza*, comunque si sia fissato n.

2 • La seconda parte della dimostrazione consiste nel far vedere che i numeri razionali contenuti nell'intervallo [0, 1] costituiscono un'infinità numerabile. Per fare ciò basta considerare ogni numero razionale nella forma p/q con p e q interi non negativi primi tra loro (tale rappresentazione è unica se si considera come rappresentazione dello 0 la frazione 0/1); si associ ora a p/q il numero naturale $m = p+q$: tale numero m è univocamente determinato da p e q; non vale il viceversa, ma è chiaro che, fissato m, esiste solo un numero *finito* di coppie di interi non negativi primi tra loro (p, q) la cui somma dia m (infatti, affinché ciò avvenga, deve per lo meno essere $p, q < m$ e per quanto sia grande m questa condizione è soddisfatta solo da un numero finito di numeri interi non negativi). Ora, si possono disporre i numeri razionali p/q in modo tale che quelli corrispondenti a un valore m precedano quelli corrispondenti a $m+1$ per ogni intero positivo m e che fissato m le frazioni ad esso corrispondente siano poste in ordine decrescente: ciascun numero razionale viene così ad occupare un preciso posto in una successione ϕ_n e dunque l'insieme $[0, 1]\setminus I$ risulta essere numerabile:

$p+q=1$	$p+q=2$	$p+q=3$	$p+q=4$	$p+q=5$		$p+q=6$	$p+q=7$			$p+q=8$		...
0/1	1/1	1/2	1/3	1/4	2/3	1/5	1/6	2/5	3/4	1/7	3/5	...
ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9	ϕ_{10}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	...

3 • Nella terza parte della dimostrazione Cantor mostra che l'insieme I è equipotente all'insieme [0, 1] privato dei punti di una qualsiasi successione $\{\varepsilon_i\}$di irrazionali, positiva, crescente e convergente a 1. Ciò è dovuto essenzialmente al fatto che sia nell'un caso che nell'altro si tolgono all'intervallo [0, 1] un'infinità numerabile di punti; infatti per (2•) si ha $I = [0, 1] \setminus \{\phi_i \mid i = 1, 2, 3, \ldots\}$.

4 **.** La quarta parte della dimostrazione consiste nel far vedere che per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \beta$ esiste una corrispondenza biunivoca tra l'intervallo aperto $]\alpha, \beta[$ e quello chiuso $[\alpha, \beta]$.

A tale scopo Cantor mostra innanzitutto una biezione f a valori da $[0, 1]$ in $]0, 1]$: tale teorema viene poi facilmente generalizzato per dimostrare l'esistenza di una biezione tra $[\alpha, \beta]$ e $]\alpha, \beta]$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha < \beta$, semplicemente attraverso un cambiamento di variabile; la funzione f che Cantor descrive è quella che risulta così definibile:

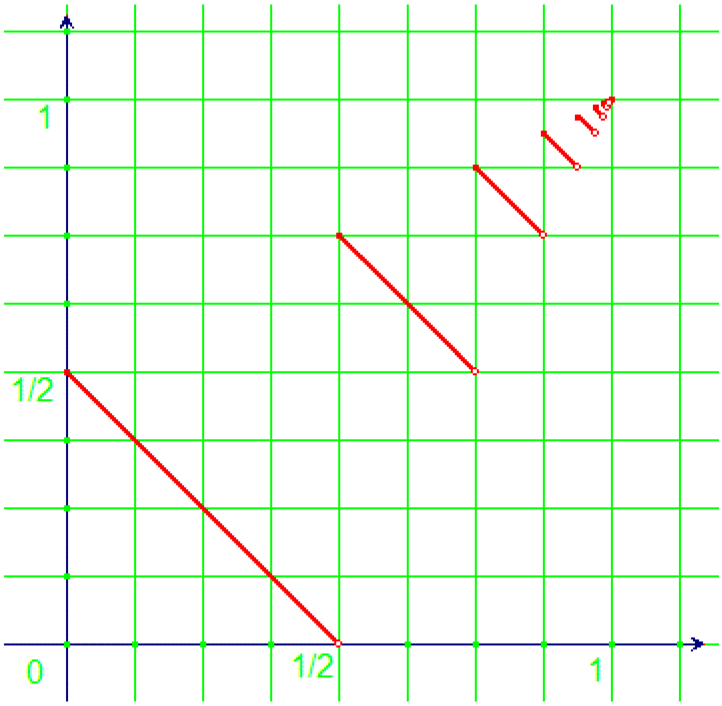
$$\forall\, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[: \qquad f(x) = -x + \frac{1}{2};$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$\forall\, x \in \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}, \sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\right[: \quad f(x) = -x + 2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{j} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1};$$

$$f(1) = 1$$

e il cui grafico è dato da:



5 **.** Nella quinta parte della dimostrazione Cantor prova che l'intervallo $[0, 1]$, privato dei valori di una successione data $\{\varepsilon_i\}$ positiva, crescente e convergente a 1 può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'intervallo completo $[0, 1]$. Infatti:

$$[0, 1] \setminus \{\varepsilon_i \mid i = 1, 2, 3, ...\} = [0, \varepsilon_1[\cup]\varepsilon_1, \varepsilon_2[\cup]\varepsilon_2, \varepsilon_3[\cup]\varepsilon_3, \varepsilon_4[\cup ... \cup \{1\}$$

$$[0, 1] = [0, \varepsilon_1[\cup [\varepsilon_1, \varepsilon_2] \cup]\varepsilon_2, \varepsilon_3[\cup [\varepsilon_3, \varepsilon_4] \cup ... \cup \{1\}$$

Ma allora i due insiemi considerati sono dati dall'unione disgiunta di intervalli i quali, tenendo conto di (4 •) sono a due a due equipotenti; di conseguenza si ha chiaramente che lo sono anche i due insiemi risultanti.

6 • Si tratta ora semplicemente di concludere: per (5 •) l'intervallo [0, 1] è equipotente a $[0, 1] \setminus \{\varepsilon_i \mid i = 1, 2, 3, ...\}$, che per (3 •) è equipotente a I. Allora, essendo la composizione di biezioni ancora una funzione biettiva, si ha che [0, 1] è in corrispondenza biunivoca con I. Ma in (1 •) si è dimostrato che I è equipotente a I^n per ogni n = 1, 2, 3, ...; dunque [0, 1] è equipotente a $[0, 1]^n$ per ogni n = 1, 2, 3, ...

■

Questo teorema mette in luce come l'intuizione, quando si parla di infinito, possa portare a veri e propri errori[1]: a dimensione maggiore parrebbe evidente che debba corrispondere una cardinalità maggiore. Il teorema ci mostra invece che il concetto di *dimensione* di una varietà non è precisabile in termini di quantità di punti che la costituiscono.

I numeri cardinali

La teoria dei numeri transfiniti di Cantor appare nella sua forma compiuta negli ultimi lavori pubblicati: i *Contributi al fondamento della teoria degli insiemi transfiniti*[2], apparsi

[1] Per confermare la contro intuitività dei risultati di Cantor, basta pensare alle difficoltà che egli incontrò per la pubblicazione di questo articolo: "Nonostante il significato fondamentale del risultato, il manoscritto costituì anche la prima occasione di apertura delle ostilità fra Cantor e il suo maestro, Kroneker. Come direttore del periodico, Kroneker era in condizione di bloccare la pubblicazione di qualunque articolo, e nel 1877 era così stupito dalla direzione assunta dalle ricerche di Cantor che prese proprio quella decisione. Benché Cantor avesse inviato il suo manoscritto il 12 luglio, non fu fatto nulla per prepararlo per la pubblicazione, e non apparve nel volume della rivista per l'anno 1877. Cantor, sospettando l'intervento di Kroneker, scrisse una lettera dai toni amari a Dedekind, lamentandosi per il trattamento subito dal suo articolo, ed esprimendo la propria inclinazione a ritirarlo dalla rivista. Dedekind, richiamandosi all'esperienza fatta in prima persona in situazioni del genere, persuase Cantor ad aspettare. Dedekind, in effetti, aveva ragione: l'articolo apparve nel volume del 1878, ma Cantor si era tanto offeso per l'incidente che si rifiutò di pubblicare ancora qualcosa sul Giornale di Crelle". ([Dauben 1983], pagg. 48 e 49)
[2] Cfr. [Cantor 1895 - 1897]

nei Mathematische Annalen del 1895 e del 1897. È in particolare a tali articoli che faremo riferimento, per la trattazione di questo e del prossimo argomento[3].

Definizioni fondamentali

Nel primo paragrafo[3] Cantor dà innanzitutto le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 1:

"Per *insieme*[4] noi intendiamo ogni riunione M in un tutto di determinati e ben distinti oggetti m dati dai nostri sensi o dal nostro pensiero (che son detti gli elementi di M)".

DEFINIZIONE 2:

"*Parte* o *sottinsieme* d'un insieme M chiamiamo ogni *altro* insieme M_1, i cui elementi siano ad un tempo elementi di M"

DEFINIZIONE 3:

"Ad ogni insieme spetta una determinata *potenza*, che noi chiamiamo anche il suo *numero cardinale*. *Potenza o numero cardinale di M chiamiamo quel concetto generale, che per mezzo della nostra attiva facoltà di pensare si deduce dall'insieme M, facendo astrazione dalla natura dei suoi diversi elementi e dall'ordine con cui vien dato*"[5].

Si indicherà la potenza di M con Card(M).

Si ha poi:

DEFINIZIONE 4[6]:

"*Diciamo equivalenti due insiemi M ed N* [...] *quando è possibile con una legge metterli in una reciproca relazione tale che ad ogni elemento di uno di essi corrisponda uno ed un solo elemento dell'altro*". In tal caso scriviamo $M \sim N$.

---

[3] Si cercherà di mantenersi fedeli al testo originale di Cantor, pur introducendo notazioni oggi maggiormente utilizzate rispetto a quelle dell'autore.

[3] [Cantor 1895 - 1897], pagg. 274 - 276

[4] In [Cantor 1879 - 1884], articolo numero 5, paragrafo 1, si trova la seguente definizione di insieme: "intendo esattamente ogni molti, che siano pensabili come uno, cioè ogni totalità di elementi determinati che possono essere collegati in un tutto da una regola". È importante notare, anche al fine delle dimostrazioni dei teoremi seguenti, che Cantor non considera l'insieme vuoto.

[5] La definizione di insieme e di numero cardinale fanno parte di una teoria intuitiva: in Cantor non c'è traccia né volontà di assiomatizzazione; questo fatto non rende l'opera meno interessante, semplicemente ha richiesto, successivamente, ulteriori approfondimenti che portassero ad una sistemazione più soddisfacente.

[6] La relazione di cui si parla in questa definizione non è, come si potrebbe erroneamente pensare, una funzione solo iniettiva, bensì anche suriettiva.

Cantor poi mostra che la (Definizione 4) fornisce una relazione di equivalenza e che, per ogni coppia di insiemi M ed N, M è equivalente a N se e solo se Card(M) = Card(N).

Nel secondo paragrafo[2] viene introdotta una nuova relazione tra numeri cardinali:

Definizione 5:

Siano M ed N due insiemi. Sia m = Card(M) e n = Card(N). Si dice che m è *minore* di n, ovvero anche che n è *maggiore* di m, e si scrive m < n ovvero n > m, se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

"1) *non esiste alcuna parte di M, che sia equivalente ad N*,

2) *esiste una parte* N_1 *di N tale che* $N_1 \sim M$".

Teorema 3:

Siano A, B due insiemi e sia a = Card(A), b = Card(B). Allora delle tre relazioni a = b, a < b e a > b una esclude le altre.

Dimostrazione:

1. Si supponga che sia contemporaneamente a = b e a > b.

   Da a = b si ottiene $A \sim B$. Da a > b, per la condizione 2), si ottiene che dovrebbe esistere una parte A_1 di A tale che $A_1 \sim B$. Da $A \sim B$ e $A_1 \sim B$ si ottiene $A_1 \sim A$. Ora, sia f la corrispondenza biunivoca che individua l'equivalenza tra A e B. Sia B_1 l'immagine mediante la f di A_1. Allora $B_1 \sim A_1$. Da $A_1 \sim A$ e $B_1 \sim A_1$ si ottiene $B_1 \sim A$. Ciò non è possibile per la condizione 2).

2. La dimostrazione del fatto che non può essere contemporaneamente a = b e a < b è del tutto analoga alla precedente.

3. Si supponga ora che sia contemporaneamente a < b e a > b.

   Da a < b, per la condizione 2), si ottiene che esiste una parte B_1 di B tale che $B_1 \sim A$; da a > b, per la condizione 1), si ottiene che non esiste alcuna parte di B che sia equivalente ad A. Si arriva quindi ad un assurdo.

■

Nota Cantor: "Più tardi [...] risulterà la verità del teorema: *Se* a *e* b *sono due numeri cardinali qualunque, si ha: o* a = b, *o* a < b, *o* a > b". Ma, aggiunge Zermelo, in realtà questa proprietà può essere dimostrata solo con l'aiuto dell'assioma di scelta.

[2] [Cantor 1895 - 1897], pagg. 276 e 277

Nel terzo paragrafo[1] Cantor introduce l'addizione e la moltiplicazione tra numeri cardinali.

DEFINIZIONE 6:

Siano M ed N due insiemi disgiunti. Sia m = Card(M) e n = Card(N). Si pone

$$\mathrm{n} + \mathrm{m} = \mathrm{Card}(M \cup N).$$

DEFINIZIONE 7:

Siano M ed N due insiemi. Sia m = Card(M) e n = Card(N). Si pone

$$\mathrm{n} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{Card}(M \times N).$$

Cantor mostra che valgono le proprietà commutativa e associativa della somma e del prodotto e la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto.

Nel quarto paragrafo[2] si definisce l'elevamento a potenza di numeri cardinali.

DEFINIZIONE 8:

Siano M ed N due insiemi. Sia m = Card(M) e n = Card(N). Si pone

$$\mathrm{n}^{\mathrm{m}} = \mathrm{Card}\ (\{f \mid f : M \longrightarrow N\}).$$

Si dimostra poi che, per ogni numero cardinale m, n, p valgono le seguenti proprietà:

$$\mathrm{a}^{\mathrm{b}} \cdot \mathrm{a}^{\mathrm{c}} = \mathrm{a}^{\mathrm{b+c}}$$

$$\mathrm{a}^{\mathrm{c}} \cdot \mathrm{b}^{\mathrm{c}} = (\mathrm{a} \cdot \mathrm{b})^{\mathrm{c}}$$

$$(\mathrm{a}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{c}} = \mathrm{a}^{\mathrm{b} \cdot \mathrm{c}}.$$

I cardinali finiti

Il quinto paragrafo[3] è dedicato ai cardinali finiti, che corrispondono ai numeri naturali (escluso lo zero). Esso fornisce, a parere di Cantor, "il fondamento più naturale, più breve e più rigoroso della teoria dei numeri finiti"[4].

DEFINIZIONE 9:

Sia e un oggetto; sia $E = \{e\}$; si pone

$$1 = \mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(\{e\});$$

[1] [Cantor 1895 - 1897], pagg. 278 - 280

[2] [Cantor 1895 - 1897], pagg. 281 - 282

[3] [Cantor 1895 - 1897], pagg. 283 - 287

[4] Annota Zermelo: "La teoria dei cardinali finiti qui sviluppata (come pure la successiva teoria del cardinale alef-zero) è, secondo i canoni moderni, poco soddisfacente, in quanto il fondamento necessario di una teoria siffatta, cioé una definizione astratta precisa di insieme finito, manca ancora e potrà essere data solo a uno stadio di sviluppo più avanzato della teoria generale, ad esempio col buon ordinamento".

sia e_1 un oggetto distinto da e; sia $E_1 = E \cup \{e_1\}$; si pone

$$2 = \text{Card}(E_1) = \text{Card}(\{e, e_1\}) = 1 + 1;$$

sia e_2 un oggetto distinto da e_1 e da e; sia $E_2 = E_1 \cup \{e_2\}$; si pone

$$3 = \text{Card}(E_2) = \text{Card}(\{e, e_1, e_2\}) = 2 + 1;$$

e così via.

Cantor nota che l'uso degli stessi numeri naturali come indici "è giustificato da ciò che un numero viene a questo modo adoperato soltanto dopo che esso è stato definito come numero cardinale". E riassume:

"Se si intende che ν-1 denoti il numero che in quella serie precede immediatamente il numero ν, abbiamo:

$$\nu = \text{Card}(E_{\nu-1})$$

$$E_\nu = E_{\nu-1} \cup \{e_\nu\}\text{"}$$

da cui

$$\text{Card}(E_\nu) = \text{Card}(E_{\nu-1}) + 1.$$

A questo punto Cantor dimostra due teoremi fondamentali sui numeri finiti: il primo dice che il successivo di ogni numero cardinale finito è ancora un numero cardinale finito; il secondo che ogni sottinsieme di un insieme finito ha cardinalità finita, minore di quella dell'insieme di partenza.

TEOREMA 4:

Sia M un insieme che non può essere messo in corrispondenza biunivoca con alcuno dei suoi sottinsiemi prorpi. Sia e un oggetto distinto da tutti gli elementi di M. Allora anche l'insieme $M \cup \{e\}$ non può essere messo in corrispondenza biunivoca con alcuno dei suoi sottinsiemi propri..

DIMOSTRAZIONE:

Si supponga per assurdo che $M \cup \{e\}$ possa essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria, che si indica con N.

Sono possibili due casi: o $e \in N$, oppure $e \notin N$.

1. Sia $e \in N$. Allora esiste una parte propria M_1 di M tale che $N = M_1 \cup \{e\}$.

Ma allora si ha che $M_1 \cup \{e\} \sim M \cup \{e\}$.

Ora, la corrispondenza biunivoca f che manda $N = M_1 \cup \{e\}$ in $M \cup \{e\}$ può essere facilmente trasformata in una corrispondenza biunivoca f^* tra gli stessi insiemi tale che si abbia $f^*(e) = $ e. Infatti, se $f(e) = e$, allora si prende

$$f^* = f;$$

se $f(e) = e' \neq e$, allora si prende f^* tale che:

$$f^*(e) = e$$
$$f^*(f^{-1}(e)) = e'$$
$$f^*(a) = f(a) \text{ per ogni } a \in M_1 \setminus \{f^{-1}(e)\}.$$

Allora si ha che la restrizione di f^* da M_1 a M è una corrispondenza biunivoca, da cui si ottiene che $M_1 \sim M$, assurdo per ipotesi.

2 . Sia $e \notin N$. Si consideri allora la corrispondenza biunivoca f che manda N nell'insieme $M \cup \{e\}$ e sia $p = f^{-1}(e)$. Allora esiste una parte propria M_1 di M tale che

$$N = M_1 \cup \{p\}.$$

Ora, la restrizione di f da M_1 a M è una corrispondenza biunivoca, da cui si ottiene che $M_1 \sim M$, assurdo per ipotesi.

■

TEOREMA 5:

Sia N un insieme tale che Card(N) = n è un numero cardinale finito e sia N_1 un suo qualsiasi sottinsieme proprio. Allora Card(N_1) $\in \{1, 2, 3, ..., n-1\}$.

DIMOSTRAZIONE:

Se n = 1, allora N non ammette sottinsiemi propri.

Se n = 2, allora esistono e ed e_1 distinti tali che $N = \{e, e_1\}$ e dunque i suoi sottinsiemi propri sono $N_1 = \{e\}$ e $N_2 = \{e_1\}$.

Chiaramente allora

$$\text{Card}(N_1) = \text{Card}(N_2) = 1 \in \{1\}.$$

Supponiamo ora che il teorema valga per un certo n, cioè che comunque preso un insieme $N' = \{e, e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$ tutti i suoi sottinsiemi propri abbiano cardinalità maggiore o uguale a 1 e minore di n. Vogliamo dimostrare che il teorema vale anche per l'insieme

$$N = \{e, e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n\}$$

con Card(N) = n+1[1].

Sia dunque M un sottinsieme proprio di N. Sono possibili tre casi: $\{e_n\} \not\subset M$, oppure $\{e_n\} = M$, oppure $\{e_n\} \subset M$.

1. Sia $\{e_n\} \not\subset M$; allora M è un sottinsieme proprio di N' e dunque

$$1 \leq \mathrm{Card}(M) < n < n+1.$$

2. Sia $\{e_n\} = M$; allora chiaramente

$$1 \leq 1 = \mathrm{Card}(M) < n < n+1.$$

3. Sia $\{e_n\} \subset M$; allora esiste un sottinsieme proprio M' di N' tale che

$$M = M' \cup \{e_n\};$$

di conseguenza si ha che

$$\mathrm{Card}(M) = \mathrm{Card}(M') + \mathrm{Card}(\{e_n\}) = \mathrm{Card}(M') + 1$$

da cui dunque

$$1 \leq \mathrm{Card}(M) < n+1.$$

■

Partendo da questi, Cantor dimostra poi i seguenti teoremi:

TEOREMA 6:

"*I termini della serie illimitata dei numeri cardinali finiti*

$$1, 2, 3, ..., \nu, ...$$

sono tutti fra loro diversi".

TEOREMA 7:

"*Ognuno di questi numeri* ν *è maggiore di quelli che lo precedono e minore di quelli che lo seguono*".

TEOREMA 8:

[1] Nella dimostrazione di questo teorema Cantor fa uso del "principio di induzione" per i numeri naturali che egli non enuncia in quanto tale, ma esplicitamente ritiene valido: "Supporremo il teorema vero fino ad un certo ν, indi concluderemo che esso sussiste per il successivo ν+1". Annota Zermelo: "Si fa uso dell'induzione completa senza che si fosse assicurata la validità di tale principio. Tale proprietà sarà giustamente usata da altri, ad esempio da Peano, per definire i naturali".

"*Non esiste alcun numero cardinale che rispetto alla sua grandezza stia tra due termini successivi* ν *e* $\nu+1$".

TEOREMA 9:

"*Sia* K *un insieme qualunque costituito da numeri cardinali finiti e diversi*; *tra questi ve n'è uno* x_1, *che è minore degli altri, e perciò è il minore di tutti*".

DIMOSTRAZIONE:

Sono possibili due casi: o $1 \in K$ oppure $1 \notin K$.

1. Sia $1 \in K$. Allora basta prendere $x_1 = 1$.

2. Sia $1 \notin K$. Allora si consideri l'insieme J di tutti i numeri cardinali che sono minori di tutti quelli che si trovano in K. Per ogni numero $\nu \in J$ si ha che appartengono a J anche tutti i numeri minori di ν. Ora, in J non possono esserci tutti i cardinali, perché, quantomeno, non vi stanno quelli che appartengono a K. Allora esiste un $\nu_1 \in J$ tale che $\nu_1+1 \notin J$. Allora basta prendere $x_1 = \nu_1+1$.

■

Si ha infine

TEOREMA 10:

"*Ogni insieme* K *costituito da numeri cardinali finiti e diversi, si può mettere sotto la forma di serie* $K = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ *essendo* $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$"

Il più piccolo cardinale transfinito

Nel sesto paragrafo[1] Cantor introduce finalmente un cardinale infinito, precisamente il più piccolo cardinale infinito. Egli utilizza come simbolo per indicare il minore di tutti i numeri cardinali infiniti (o meglio, secondo la sua terminologia, transfiniti[2]) la lettera ebraica alef[3], associata all'indice zero: $\aleph_0$.

[1] [Cantor 1895 - 1897], pagg. 287 - 292

[2] Scrive Cantor: "L'infinito attuale si presenta in tre contesti: il *primo* è quello in cui si presenta nella forma più completa, in un essere completamente indipendente trascendente questo mondo, *in Deo*, ed è questo che io chiamo l'Infinito Assoluto o semplicemente l'Assoluto; il *secondo* è quando si presenta nel mondo contingente, nel creato; il *terzo* è quando la mente lo afferra *in abstracto*, come grandezza matematica, numero o tipo d'ordine. Voglio sottolineare chiaramente la differenza tra l'Assoluto e quello che io chiamo il Transfinito, cioè l'infinito attuale degli ultimi due tipi, perché si tratta di oggetti evidentemente limitati, suscettibili di accrescimento e quindi collegati al finito". (Citato in [Rucker 1982], pagg. 11 e 12)

[3] "Il simbolo per l'infinito di uso più frequente è l'otto coricato, una curva che i matematici chiamano lemniscata. Questo simbolo fu usato per la prima volta in un trattato sulle sezioni coniche del XVII secolo. La

DEFINIZIONE 10:

"Gli insiemi con numero cardinale finito diconsi *insiemi finiti*; tutti gli altri li vogliamo chiamare *insiemi transfiniti* ed i numeri cardinali che ad essi corrispondono *numeri cardinali transfiniti*".

TEOREMA 11:

L'insieme di tutti i cardinali finiti è transfinito.

DIMOSTRAZIONE:

Si indichi con $\mathbb{N}$ l'insieme di tutti i numeri cardinali finiti. Sia $e_0 \notin \mathbb{N}$. Allora

$$\mathbb{N} \cup \{e_0\} \sim \mathbb{N}.$$

Per dimostrare ciò basta considerare la corrispondenza biunivoca

$$f : \mathbb{N} \cup \{e_0\} \longrightarrow \mathbb{N} \quad \text{tale che}$$

$$f(e_0) = 1 \quad \text{e} \quad f(\nu) = \nu + 1 \quad \text{per ogni} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Si ottiene allora che $\mathrm{Card}(\mathbb{N} \cup \{e_0\}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$.

Ora, se $\mathrm{Card}(\mathbb{N})$ fosse un numero cardinale finito, allora (per la DEFINIZIONE 9) si avrebbe che $\mathrm{Card}(\mathbb{N} \cup \{e_0\})$ sarebbe ancora un cardinale finito, distinto (per il TEOREMA 6) da $\mathrm{Card}(\mathbb{N})$. Ciò è in contraddizione con quanto appena dimostrato.

Quindi $\mathrm{Card}(\mathbb{N})$ è transfinito.

■

TEOREMA 12:

Sia $\aleph_0$ la cardinalità dell'insieme di tutti i cardinali finiti. Allora, per ogni cardinale finito ν si ha che $\aleph_0 > \nu$.

DIMOSTRAZIONE:

Si indichi come prima con $\mathbb{N}$ l'insieme di tutti i cardinali finiti e sia invece M un insieme di cardinalità finita ν. Sarà dunque

$$M = \{x_1, x_2, x_3, \dots x_\nu\}.$$

In base alla DEFINIZIONE 5 si ha che $\aleph_0 > \nu$ se e soltanto se

sua diffusione fu rapida e presto esso fu usato per indicare l'infinito o l'eternità in vari contesti. Per esempio, nel 1700 il simbolo dell'infinito cominciò ad apparire sulla carta dei Tarocchi nota come il Matto. È un'interessante coincidenza che il simbolo cabalistico associato con questa particolare carta dei Tarocchi sia la lettera ebraica ℵ, perché Georg Cantor, il fondatore della moderna teoria matematica dell'infinito, usò il simbolo $\aleph_0$ per indicare il primo numero infinito" ([Rucker 1982], pagg. 1 e 2)

1) non esiste alcuna parte di M che sia equivalente a $\mathbb{N}$;

2) esiste una parte N di $\mathbb{N}$ tale che $N \sim M$.

È facile verificare la condizione 2); infatti basta considerare l'insieme

$$N = \{1, 2, 3, ..., \nu\} \subset \mathbb{N}$$

e la corrispondenza biunivoca da N in M che ad ogni $i \in N$ associa l'elemento x_i di M.

Ora, essendo $\nu = \text{Card}(M)$ un numero cardinale finito, per il TEOREMA 5 si ha che un qualsiasi sottinsieme proprio $M_1 \subset M$ è tale per cui

$$\text{Card}(M_1) \in \{1, 2, 3, ..., \nu\text{-}1\}.$$

Dunque in particolare la cardinalità di M_1 è finita e allora, per il TEOREMA 11, non può essere $M_1 \sim \mathbb{N}$. Risulta allora verificata anche la condizione 1).

■

TEOREMA 13:

Ogni insieme transfinito T ammette sottinsiemi il cui numero cardinale è $\aleph_0$.

Di questo teorema si riportano due dimostrazioni: la prima di esse rispecchia quella data da Cantor[1] e fornisce un'idea intuitiva per la seconda, più formale.

DIMOSTRAZIONE 13.1:

Sia $t_1 \in T$.

Si consideri ora l'insieme $T_1 = T \setminus \{t_1\}$. Se esso fosse finito, allora lo sarebbe anche l'insieme $T = T_1 \cup \{t_1\}$, contro quanto ipotizzato. Quindi anche T_1 è transfinito.

Sia $t_2 \in T_1$.

Si consideri allora l'insieme $T_2 = T_1 \setminus \{t_2\}$. Se esso fosse finito, allora lo sarebbe anche l'insieme $T_1 = T_2 \cup \{t_2\}$, contro quanto visto. Quindi anche T_2 è transfinito.

Così di seguito si costruisce un insieme $\{t_1, t_2, t_3, ..., t_\nu, ...\}$ di cardinalità $\aleph_0$ tutto contenuto in T.

■

[1] Annota Zermelo: "La dimostrazione del teorema, puramente intuitiva e logicamente insoddisfacente, rappresenta il primo tentativo conosciuto di giungere, attraverso successive scelte di elementi qualsiasi, al buon ordinamento di un insieme dato. Si giunge a una dimostrazione corretta se in primo luogo ci si limita subito ad un insieme ben ordinato, il cui minimo segmento transfinito fornirà proprio il cardinale richiesto $\aleph_0$".

DIMOSTRAZIONE 13.2:

Si tratta di dimostrare che ogni insieme infinito T ammette un sottinsieme che può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

1. Si dimostra innanzitutto che per ogni numero naturale n esistono delle funzioni iniettive

$$\iota : \{\nu \in \mathbb{N} \mid \nu < n\} \longrightarrow T$$

non univocamente determinate. Per farlo si procede per assurdo, supponendo che ciò non avvenga per tutti gli $n \in \mathbb{N}$. Sia dunque

$$I = \{ n \in \mathbb{N} \mid \text{non esiste alcuna iniezione } \iota : \{\nu \in \mathbb{N} \mid \nu < n\} \longrightarrow T\};$$

Per il buon ordinamento di $\mathbb{N}$ questo insieme ammette minimo. Sia dunque

$$m = \min(I).$$

Ora, $m \neq 0$ in quanto la funzione

$$\varnothing : \varnothing = \{\nu \in \mathbb{N} \mid \nu < 0\} \longrightarrow T$$

è iniettiva.

Di conseguenza esiste $p \in \mathbb{N}$ tale che $p + 1 = m$. In particolare allora $p < m$ e dunque, per come è stato definito m, esiste almeno una funzione iniettiva

$$\iota_p : \{\nu \in \mathbb{N} \mid \nu < p\} \longrightarrow T.$$

L'immagine di $\{\nu \in \mathbb{N} \mid \nu < p\}$ mediante ι_p è un sottinsieme finito di T. Poiché T è per ipotesi infinito, esiste

$$t \in T \setminus \iota_p(\{\nu \in \mathbb{N} \mid \nu < p\}).$$

Ma allora se si considera la funzione

$$\iota_m : \{\nu \in \mathbb{N} \mid \nu < m\} \longrightarrow T \quad \text{tale che}$$

$$\iota_m(p) = t \text{ e}$$

$$\iota_m(h) = \iota_p(h) \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{N}, \text{ con } h < p$$

è chiaro che si ottiene una iniettività da $\{\nu \in \mathbb{N} \mid \nu < m\}$ in T, il che è assurdo per come è stato preso m.

2. A questo punto per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$F_n = \{\iota_n : \{\nu \in \mathbb{N} \mid \nu < n\} \longrightarrow T \mid \iota_n \text{ è iniettiva}\}.$$

Grazie a quanto provato in (1 •), per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che F_n è non vuoto. Inoltre è chiaro che per ogni m, $n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$, si ha $F_m \neq F_n$.

Si può allora applicare l'assioma di scelta[1] e dire che esiste un insieme K tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia Card $(K \cap F_n) = 1$. Sia $K \cap F_n = \{\varphi_n\}$.

Dunque per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n : \{\nu \in \mathbb{N} \mid \nu < n\} \longrightarrow T$$

è una funzione iniettiva. Da esse si definisce per ricorsione la funzione

$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow T$ tale che

$$\varphi(0) = \varphi_1(0)$$

e per ogni $q \in \mathbb{N}$:

$$\varphi(q+1) = \varphi_{q+2}(h) \quad \text{dove} \quad h = \min \{p \in \{0, 1, ..., q+1\} \mid \varphi(p) \notin \varphi(\{0, 1, ..., q\})\}.$$

Si dimostra ora che φ è iniettiva. Siano infatti r, $s \in \mathbb{N}$, con $r \neq s$. Se $r < s$ (in caso contrario la dimostrazione è analoga), allora per come è definita φ si ha

$$\varphi(s) = \varphi((s-1) +1) \notin \varphi(\{0, 1, ..., s-1\})$$

mentre banalmente, essendo $r \leq s-1$, si ha

$$\varphi(r) \in \varphi(\{0, 1, ..., s-1\}).$$

3 • Concludendo, si è trovata una funzione iniettiva $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow T$; allora la funzione

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \varphi(\mathbb{N}) \subseteq T$$

è una biezione tra $\mathbb{N}$ e un sottinsieme di T, sottinsieme che dunque ha cardinalità $\aleph_0$.

■

Immediatamente dal teorema appena dimostrato si ricava il seguente:

TEOREMA 14:

"*$\aleph_0$ è il più piccolo cardinale transfinito*".

A questo punto Cantor sviluppa alcuni esempi di calcolo con i cardinali finiti e transfiniti:

TEOREMA 15:

[1] Data una famiglia $\Im$ non vuota di insiemi F non vuoti e a due a due disgiunti, esiste $K \subseteq \bigcup \Im$ tale che per ogni $F \in \Im$ si abbia Card $(K \cap F) = 1$.

Si ha che:

1) $\aleph_0 + \nu = \aleph_0$ per ogni numero cardinale finito ν;

2) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$;

3) $\aleph_0 \cdot \nu = \aleph_0$ per ogni numero cardinale finito ν;

4) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$;

5) $\aleph_0^{\nu} = \aleph_0$ per ogni numero cardinale finito ν.

DIMOSTRAZIONE:

1 . Sia $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$ un insieme di cardinalità $\aleph_0$; sia $\{y_1, y_2, ..., y_\nu\}$ un insieme, disgiunto dal primo, di cardinalità finita ν. È chiaro che la funzione

$$f: \{y_1, y_2, ..., y_\nu\} \cup \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\} \longrightarrow \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$$

tale che

$$f(y_j) = x_j \quad \text{per ogni} \quad j = 1, 2, ..., \nu$$

$$f(x_h) = x_{h+\nu} \quad \text{per ogni} \quad h = 1, 2, 3, ..., n, ...$$

costituisce una biezione.

2 . Sia $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$ un insieme di cardinalità $\aleph_0$; sia $\{y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...\}$ un altro insieme, disgiunto dal primo, ancora di cardinalità $\aleph_0$. È chiaro che la funzione

$$f: \{y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...\} \cup \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\} \longrightarrow \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$$

tale che

$$f(y_j) = x_{2j-1} \quad \text{per ogni} \quad j = 1, 2, 3, ..., n, ...$$

$$f(x_h) = x_{2h} \quad \text{per ogni} \quad h = 1, 2, 3, ..., n, ...$$

costituisce una biezione[1].

3 . Sia $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$ un insieme di cardinalità $\aleph_0$; sia $\{y_1, y_2, ..., y_\nu\}$ un insieme di cardinalità finita ν. Si dimostra che la funzione

[1] Non si può non ricordare l'immagine con cui Hilbert illustrava queste proprietà di $\aleph_0$. Si dice che nelle sue conferenze a carattere divulgativo egli raccontasse la storia di un albergo con infinite stanze. L'Hotel di Hilbert ha $\aleph_0$ camere: la camera 1, la camera 2, la camera 3, ..., la camera n, ... Una delle caratteristiche più sconcertanti di quest'albergo è che, anche quando è al completo, è sempre possibile trovare posto per nuovi ospiti senza che nessuno debba condividere la sua stanza con un altro! Supponiamo, per esempio, che siano arivati $\aleph_0$ ospiti e che ogni camera sia occupata collogando l'ospite n nella camera n. Supponiamo che a questo punto arrivi un nuovo ospite: per farlo alloggiare basta metterlo nella camera 1, trasferire l'ospite 1 nella camera 2, l'ospite 2 nella camera 3, e così via. E se arriva ancora un nuovo ospite si procede nello stesso modo. E se anche arrivassero contemporaneamente altri $\aleph_0$ ospiti basterebbe risistemare i primi nelle camere pari e i nuovi arrivati in quelle dispari. (Cfr. [Rucker 1982], pagg. 85 e 86)

$$f: \{y_1, y_2, ..., y_\nu\}\times\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\} \longrightarrow \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$$

tale che per ogni $j = 1, 2, ..., \nu$ e per ogni $h = 1, 2, 3, ..., n, ...$

$$f((y_j, x_h)) = x_{(h-1)\nu+j}$$

costituisce una biezione.

4. Sia $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$ un insieme di cardinalità $\aleph_0$. Si dimostra che la funzione

$$f: \{ x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}\times\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\} \longrightarrow \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$$

tale che per ogni $j = 1, 2, 3, ..., n, ...$ e per ogni $h = 1, 2, 3, ..., n, ...$

$$f((x_j, x_h)) = x_{\, j+(j+h-1)(j+h-2) / 2}$$

costituisce una biezione.

5. Sia $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$ un insieme di cardinalità $\aleph_0$; sia $\{y_1, y_2, ..., y_\nu\}$ un insieme di cardinalità finita ν. Si dimostra che la funzione

$$f: \{g \mid g : \{y_1, y_2, ..., y_\nu\} \longrightarrow \mathbb{N}\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

tale che per ogni $g : \{y_1, y_2, ..., y_\nu\} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$f(g) = 2^{g(y_1)} \cdot 3^{g(y_2)} \cdot 5^{g(y_3)} \cdot ... \cdot p_\nu^{\;g(y_\nu)}$$

(dove p_i indica, per ogni $i = 1, 2, ..., \nu$, l'i-esimo numero primo) costituisce una biezione.

■

Una proprietà degli insiemi transfiniti

Nella parte finale del sesto paragrafo Cantor dimostra quelle popriertà che già dieci anni prima erano state assunte da Dedekind come definizioni degli insiemi finiti e transfiniti.

TEOREMA 16:

"*Ogni insieme finito E è cosifatto che esso non è equivalente ad alcuno dei suoi insiemi parziali*".

TEOREMA 17:

"*Ogni insieme transfinito T ha degli insiemi parziali T_1, che gli sono equivalenti*".

Per ora parrebbe che l'unico cardinale transfinito introdotto da Cantor sia $\aleph_0$; in realtà già in una nota del quarto paragrafo Cantor si occupa della cardinalità del continuo *c* e fa vedere che

TEOREMA 18:

$$c = 2^{\aleph_0}.$$

DIMOSTRAZIONE:

Si è già dimostrato che l'insieme dei numeri reali è equipotente all'intervallo [0, 1[. Per dimostrare che [0, 1[è equipotente all'insieme

$$G = \{g \mid g : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}\}$$

Cantor procede con le seguenti riflessioni. Utilizzando la notazione binaria si ottiene che per ogni $x \in [0, 1[$ esiste almeno una $g \in G$ tale che

$$x = g(0)/2^0 + g(1)/2^1 + g(2)/2^2 + \ldots + g(\nu)/2^\nu + \ldots \quad (*)$$

Ora, tale rappresentazione è unica, tranne che per i numeri del tipo

$$s = (2j + 1)/2^h < 1 \quad (**)$$

che ammettono due diverse rappresentazioni del tipo (*). Allora per contare i numeri reali compresi nell'intervallo [0, 1[occorre contare quante sono le diverse possibili rappresentazioni del tipo (*) e poi sottrarre una quantità pari a quanti sono i numeri del tipo (**). Questi ultimi sono evidentemente un'infinità numerabile.

Ora, se da un insieme infinito qualsiasi X più che numerabile (e per il TEOREMA 1 è noto che $c > \aleph_0$) si toglie un'infinità numerabile $\{s_n\}$, si ottiene ancora un insieme X_1 della stessa cardinalità di quello di partenza; infatti:

$$X = X_1 \cup \{s_n\} = X_1 \cup \{s_{2n}\} \cup \{s_{2n+1}\}$$

$$\{s_n\} \sim \{s_{2n+1}\} \sim \{s_{2n}\}$$

e dunque

$$X_1 = X \setminus \{s_n\} \sim X \setminus \{s_{2n+1}\} = X_1 \cup \{s_{2n}\} \sim X_1 \cup \{s_n\} = X.$$

Nel nostro caso si ottiene allora che

$$\text{Card}([0, 1[) = \text{Card}(G)$$

e dunque $c = 2^{\aleph_0}$.

■

A questo punto della trattazione, Cantor ferma temporaneamente la sua costruzione dei numeri cardinali: per procedere oltre vuole prima parlare dei tipi d'ordine, e introdurre così i numeri ordinali transfiniti. Il prossimo paragrafo si occuperà di dare un cenno a questo secondo filone di ricerca.

<u>*I numeri ordinali*</u>

Definizioni fondamentali

In *Über die unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*[1] Cantor afferma: "Per insieme *ben ordinato* si intende ogni insieme ben definito, i cui elementi sono collegati da una successione data e determinata, secondo la quale c'è un primo elemento del sistema e ogni elemento (a meno che sia l'ultimo della successione) è sempre seguito da un altro ben preciso, come pure a ogni arbitrario insieme di elementi finito o no appartiene un determinato elemento, che lo segue immediatamente nella successione (sempre che ci siano elementi dell'insieme che seguono tutti gli elementi dell'insieme arbitrario considerato). [...] Si dice che due insiemi bene ordinati hanno lo stesso numero [ordinale] (rispetto alla successione cui hanno dato luogo), se è possibile una corrispondenza biunivoca tra di essi, tale che, se E ed F sono due qualsiasi elementi del primo, E_1 ed F_1 i corrispondenti elementi del secondo, la posizione di E ed F nella successione del primo insieme sia in accordo con quella di E_1 ed F_1 nella successione del secondo, così che se E precede F nella successione del primo insieme, anche E_1 precede F_1 nella successione del secondo. [...] La differenza essenziale tra insiemi finiti ed infiniti, sta in questo, che un insieme finito presenta lo stesso numero [ordinale] di elementi, qualunque sia la successione in cui lo si ordina; invece un insieme costituito da un numero infinito di elementi può dar luogo in generale a numeri [ordinali] diversi, a seconda della successione in cui vengono ordinati gli elementi. La *potenza* di un insieme [ovvero il suo numero cardinale] è, come vedremo, un attributo indipendente dall'ordine; il *numero* [ordinale] dell'insieme si presenta invece come un fattore dipendente in generale da una successione data di elementi, non appena si ha a che fare con insiemi infiniti".

Considerato un insieme *M* dotato di una relazione d'ordine < tale che ogni sottinsieme (non vuoto) di *M* ammetta minimo (rispetto a <), si indicherà il numero ordinale di *M* con la

[1] Cfr. [Cantor 1879 - 1884], articolo numero 5, paragrafo 2

scrittura Ord(M, <). In *Contributi al fondamento della teoria degli insiemi transfiniti*[1] (e precisamente nel tredicesimo paragrafo[2]) Cantor introduce la nozione di *segmento* di un insieme ben ordinato:

DEFINIZIONE 11:

Sia E un insieme ben ordinato dalla relazione <; sia $e \in E$ tale che esista almeno un elemento $f \in E$ con $f < e$. L'insieme S di tutti gli elementi di E che risultano minori di e è detto *segmento di E* o, più precisamente, segmento di E determinato dall'elemento e; viceversa, l'insieme R di tutti gli altri elementi di E, compreso e, è detto *resto di E* o, più precisamente, resto di E determinato dall'elemento e:

$$S = \{x \in E \mid x < e\}$$

$$R = E \setminus S = \{y \in E \mid y = e \vee y > e\}.$$

Nelle notazioni della DEFINIZIONE 11, risulta chiaro che $E = S \cup R$.

È però possibile introdurre un nuovo tipo di operazione tra due insiemi ben ordinati A e B, che si chiamerà *unione ordinata* di A e B e si indicherà con

$$A \cup_o B,$$

che fornisce un altro insieme ben ordinato, non è commutativa e non risulta essere solo insiemistica, bensì tiene conto dell'ordine stabilito su A e su B.

Tale definizione viene data in modo tale che, se S e R sono il segmento e il resto di un insieme ben ordinato E rispetto ad un suo elemento e, si abbia

$$E = S \cup_o R.$$

DEFINIZIONE 12:

Siano A un insieme ben ordinato dalla relazione $<_a$; B un insieme (disgiunto da A) ben ordinato dalla relazione $<_b$; $b_i \in B$ tale che per ogni $b \in B$ con $b_i \neq b$ si abbia $b_i <_b b$. Si chiama *unione ordinata* $E = A \cup_o B$ l'insieme $E = A \cup B$ ben ordinato[3] dalla relazione < tale che:

[1] Nel paragrafo 7 di [Cantor 1879 - 1884] viene introdotta, in realtà, una teoria un po' più generale: quella degli *insiemi semplicemente ordinati* e dei relativi *tipi d'ordine*. Le operazioni di addizione e moltiplicazione vengono definite proprio sui tipi d'ordine e solo nel paragrafo 12 ci si occupa degli insiemi ben ordinati: "Tra gli insiemi semplicemente ordinati, un posto particolare hanno quelli bene ordinati; i loro tipi d'ordine, che chiameremo numeri ordinali, permettodo di dare una definizione precisa delle potenze, ovvero dei numeri cardinali transfiniti". Ci si occuperà qui, per brevità e semplicità, solo di questo caso particolare, che, del resto, è quello più interessante.

[2] [Cantor 1895 - 1897], pagg. 314 - 320

[3] Che l'unione (insiemistica) dotata della relazione < definita di seguito sia un insieme ben ordinato andrebbe dimostrato. La dimostrazione, che risulta essere esclusivamente un pedante controllo del verificarsi di tutte le

$$\text{per ogni } a_1, a_2 \in A, \quad \text{se } a_1 <_a a_2 \quad \text{allora } a_1 < a_2;$$

$$\text{per ogni } b_1, b_2 \in B, \quad \text{se } b_1 <_b b_2 \quad \text{allora } b_1 < b_2;$$

$$\text{per ogni } a \in A, \quad a < b_i.$$

È chiaro che, nelle notazioni della DEFINIZIONE 12, da $E = A \cup_o B$ si deduce che A e B sono, rispettivamente, il segmento e il resto di E determinati dall'elemento b_i.

Si verifica che l'unione disgiunta di insiemi ben ordinati è associativa ma non è commutativa.

Nel quattordicesimo paragrafo[2] Cantor definisce le operazioni di addizione e moltiplicazione tra numeri ordinali: esse sono, chiaramente, definite in modo diverso da quelle tra cardinali e sono ad esse riconducibili solo nel caso finito.

DEFINIZIONE 13:

Siano A un insieme ben ordinato dalla relazione $<_a$; B un insieme (disgiunto da A) ben ordinato dalla relazione $<_b$; $E = A \cup_o B$ ben ordinato dalla relazione $<$ come dalla definizione di unione ordinata. Sia $\mathrm{a} = \mathrm{Ord}(A, <_a)$ e $\mathrm{b} = \mathrm{Ord}(B, <_b)$. Si pone

$$\mathrm{a} + \mathrm{b} = \mathrm{Ord}(E, <).$$

DEFINIZIONE 14:

Siano A un insieme ben ordinato dalla relazione $<_a$; B un insieme ben ordinato dalla relazione $<_b$. Sia $\mathrm{a} = \mathrm{Ord}(A, <_a)$ e $\mathrm{b} = \mathrm{Ord}(B, <_b)$. Sia $\nu = \mathrm{Card}(B)$; si considerino ν insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ a due a due disgiunti, tali che per ogni $\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \nu$ si abbia che A_i è ben ordinato dalla relazione $<_i$ e $\mathrm{Ord}(A_i, <_i) = \mathrm{a}$. Sia $E = A_1 \cup_o A_2 \cup_o \ldots \cup_o A_\nu$ ben ordinato dalla relazione $<$ come dalla definizione di unione ordinata[3]. Si pone

$$\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = \mathrm{Ord}(E, <).$$

Cantor mostra poi che valgono le seguenti proprietà:

TEOREMA 19:

Siano A un insieme ben ordinato dalla relazione $<_a$; B un insieme ben ordinato dalla relazione $<_b$ e C un insieme ben ordinato dalla relazione $<_c$ tali che risultino ben definite le

proprietà essenziali affinché $<$ sia una relazione d'ordine stretto su E e affinché ogni sottinsieme di E ammetta minimo, si basa sul fatto che A e B sono ben ordinati e sulla definizione di $<$.

[2] [Cantor 1895 - 1897], pagg. 321 e 322

[3] Essendo l'unione ordinata di insiemi ben ordinati associativa, si può porre indifferentemente

$$A_1 \cup_o A_2 \cup_o A_3 = A_1 \cup_o (A_2 \cup_o A_3) \quad \text{oppure } A_1 \cup_o A_2 \cup_o A_3 = (A_1 \cup_o A_2) \cup_o A_3$$

e poi estendere tale definizione ad una successione di cardinalità qualsiasi di insiemi ben ordinati.

operazioni di seguito considerate tra i loro numeri ordinali a = Ord(A, $<_a$), b = Ord(B, $<_b$) e c = Ord(C, $<_c$). Si ha allora che

$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c;$$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Anche sui numeri ordinali viene poi definita una relazione d'ordine $\angle$:

Definizione 15:

Siano A un insieme ben ordinato dalla relazione $<_a$; $a_1, a_2 \in A$ tali che $a_1 < a_2$; siano A_1 e A_2 i segmenti di A determinati, rispettivamente, dagli elementi a_1 e a_2. Siano $<_{a1}$ e $<_{a2}$, le restrizioni di $<_a$, rispettivamente, ad A_1 e ad A_2. Si pone allora che

$$\mathrm{Ord}(A_1, <_{a1}) \angle \mathrm{Ord}(A_2, <_{a2});$$

ed inoltre per ogni segmento A_1 di A si pone

$$\mathrm{Ord}(A_1, <_{a1}) \angle \mathrm{Ord}(A, <_a).$$

Il confronto tra gli ordinali di insiemi che non sono segmenti di uno stesso insieme viene fatto riportandosi, attraverso biezioni che conservano l'ordine, a insiemi di questo tipo.

Alcuni esempi

Ci si propone ora di fare alcuni esempi, prima di procedere oltre.

Si diceva all'inizio del paragrafo che la nozione di numero ordinale non è molto significativa per gli insiemi finiti. Si consideri, per esempio, l'insieme F = {a, b, c}, con Card(F) = 3. Ora, dotiamo F di una qualsiasi delle possibili relazioni d'ordine stretto che rendono F un insieme ben ordinato:

$$\text{sia } <_1 \text{ tale che } a <_1 b <_1 c;$$

$$\text{sia } <_2 \text{ tale che } c <_2 a <_2 b;$$

$$\text{sia } <_3 \text{ tale che } b <_3 c <_3 a.$$

Si ha che Ord(F, $<_1$) = Ord(F, $<_2$) = Ord(F, $<_3$) e dunque in realtà il numero ordinale di F risulta indipendente dall'ordine scelto tra i suoi elementi.

Consideriamo ora l'insieme $\mathbb{N}$ di tutti i numeri naturali dotato della relazione d'ordine stretto < così definita: per ogni m, n $\in \mathbb{N}$

$$m < n \text{ se e solo se esiste } d \in \mathbb{N}, \text{ con } d \neq 0, \text{ tale che } n = m + d.$$

Si ottiene così che $\mathbb{N}$ è un insieme ben ordinato il cui numero ordinale si indica con ω[1]:

$$\omega = \mathrm{Ord}(\mathbb{N}, <).$$

In base alla relazione d'ordine $\angle$ sopra introdotta, ω è maggiore di ogni ordinale finito (cioè di ogni ordinale corrispondente ad un insieme finito) e minore di ogni ordinale transfinito (cioè di ogni ordinale corrispondente ad un insieme transfinito). All'insieme $\mathbb{N}$ non corrisponde però solo l'ordinale ω: si consideri ad esempio, sempre su $\mathbb{N}$, la relazione d'ordine stretto $<_0$ così definita: per ogni $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$m <_0 0 \quad \text{e} \quad m <_0 n \text{ se e solo se } m < n.$$

Si ha allora che $\omega \angle \mathrm{Ord}(\mathbb{N}, <_0)$;

per dimostrare ciò basta considerare gli insiemi

$$M = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_0\} \quad \text{con} \quad x_1 <_m x_2 <_m x_3 <_m \ldots <_m x_0;$$

$$N = \{y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots\} \quad \text{con} \quad y_0 <_n y_1 <_n y_2 <_n y_3 <_n \ldots$$

Si ha

$$\mathrm{Ord}(M, <_m) = \mathrm{Ord}(\mathbb{N}, <_0) \quad \text{e} \quad \mathrm{Ord}(N, <_n) = \omega.$$

Ora, la corrispondenza

$$f : \{y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots\} \longrightarrow \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

tale che per ogni $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$f(y_i) = x_{i+1}$$

è chiaramente una funzione biettiva che conserva l'ordine. Inoltre $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ costituisce un segmento di $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_0\}$; in base alla Definizione 15, allora, si ottiene che

$$\mathrm{Ord}(N, <_n) \angle \mathrm{Ord}(M, <_m)$$

da cui $\omega \angle \mathrm{Ord}(\mathbb{N}, <_0)$.

Se poi si indica, per definizione, con 1 il numero ordinale dell'insieme $\{0\}$ si ottiene che

$$\mathrm{Ord}(\mathbb{N}, <_0) = \omega + 1.$$

Si è quindi dimostrato che

$$\omega \angle \omega + 1,$$

[1] "Forse non è un caso che Cantor abbia utilizzato omega per indicare il numero che sta alla fine di tutti i numeri finiti. La parola 'omega' ci è familiare perché legata all'Apocalisse, dove Dio dice: 'Io sono l'alfa e l'omega' intendendo 'Io sono il principio e la fine'." ([Rucker 1982], pag. 77)

mentre è immediato verificare che

$$1 + \omega = \omega;$$

non vale dunque la proprietà commutativa dell'addizione tra numeri ordinali.

Si indichi ora con $2 = \mathrm{Ord}(E, <_e)$ dove $E = \{e_0, e_1\}$ e $e_0 <_e e_1$. Allora

$$2 \cdot \omega = \mathrm{Ord}(\{e_{0,0}, e_{1,0}, e_{0,1}, e_{1,1}, e_{0,2}, e_{1,2}, e_{0,3}, e_{1,3}, \ldots, e_{0,\omega}, e_{1,\omega}\}, <)$$

dove $e_{0,0} < e_{1,0} < e_{0,1} < e_{1,1} < e_{0,2} < e_{1,2} < e_{0,3} < e_{1,3} < \ldots < e_{0,\omega} < e_{1,\omega}$.

Si ha dunque che

$$2 \cdot \omega = \omega.$$

Invece

$$\omega \cdot 2 = \mathrm{Ord}(\{y_{0,1}, y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1}, \ldots y_{\omega,1}, y_{0,2}, y_{1,2}, y_{2,2}, y_{3,2}, \ldots y_{\omega,2}\}, <)$$

dove $y_{0,1} < y_{1,1} < y_{2,1} < y_{3,1} < \ldots y_{\omega,1} < y_{0,2} < y_{1,2} < y_{2,2} < y_{3,2} < \ldots y_{\omega,2}$.

Dunque $\omega \cdot 2 \neq \omega$ e quindi non vale la proprietà commutativa del prodotto di numeri ordinali.

La prima e la seconda classe numerica

Dopo aver fornito l'aritmetica dei cardinali e l'aritmetica degli ordinali, Cantor si pone l'obiettivo di risolvere il problema lasciato in sospeso alla fine del sesto paragrafo[1]: quello della genesi di cardinali nuovi oltre a quelli finiti, a $\aleph_0$ e a c. A tal fine Cantor studia innanzitutto la prima e la seconda classe numerica:

DEFINIZIONE 16:

Si chiama *prima classe numerica* l'insieme di tutti i numeri ordinali degli insiemi di cardinalità finita.

La cardinalità della prima classe numerica è allora $\aleph_0$.

DEFINIZIONE 17:

Si chiama *seconda classe numerica* l'insieme di tutti i numeri ordinali degli insiemi ben ordinati di cardinalità $\aleph_0$.

[1] "Dopo di aver introdotto il più piccolo numero cardinale transfinito $\aleph_0$ e di averne stabilite le più immediate proprietà, si presenta la questione dei numeri cardinali più elevati e della loro deduzione da $\aleph_0$" ([Cantor 1895 - 1897], pag. 292)

Nel quindicesimo paragrafo[2] Cantor giunge a queste conclusioni: "I numeri della seconda classe numerica si generano in due modi a partire da quelli minori. I primi, che chiameremo *numeri di prima specie*, si ottengono aggiungendo 1 ad un numero immediatamente inferiore

$$\alpha = \alpha_1 + 1\ ;$$

gli altri, che chiameremo *numeri di seconda specie*, sono tali che per essi *non esiste un numero immediatamente inferiore* α_1; sono definiti come limiti di successioni fondamentali[3], secondo la formula

$$\alpha = \lim(\alpha_i);$$

qui α è il numero immediatamente superiore ad ogni α_i. I due metodi generativi di numeri più grandi a partire da quelli più piccoli, saranno detti il I PRINCIPIO e il II PRINCIPIO di formazione dei numeri della seconda classe".

Grazie a questi principi, partendo dal primo ordinale 1, si ottengono tutti i seguenti:

1,

2, 3, 4, 5, ... gli ordinali finiti si ottengono attraverso il I PRINCIPIO applicato successivamente a partire dall'ordinale 1: essi sono tutti e soli gli ordinali della prima classe;

ω il primo ordinale transfinito si ottiene attraverso il II PRINCIPIO:

$$\omega = \lim(\alpha_n)$$

dove $\{\alpha_n\}$ è la successione (numerabile) di tutti gli ordinali finiti; esso è il più piccolo ordinale della seconda classe;

$\omega + 1, \ldots$ si ottengono attraverso il I PRINCIPIO applicato successivamente a partire dall'ordinale ω;

$\omega \cdot 2$ si ottiene attraverso il II PRINCIPIO:

$$\omega \cdot 2 = \lim(\omega + \alpha_n)$$

dove $\{\alpha_n\}$ è la successione (numerabile) di tutti gli ordinali finiti;

[2] [Cantor 1895 - 1897], pagg. 323 - 329

[3] Cantor chiama successione fondamentale ogni successione crescente di numeri ordinali; il limite di una tale successione è definito come quell'ordinale che si ottiene sommando tutti gli ordinali della successione stessa. Si intende che le successioni sono numerabili (questa limitazione è a volta indicata come III PRINCIPIO di formazione dei numeri ordinali; essa è valida per tutti quelli della seconda classe).

$(\omega \cdot 2) + 1, \ldots$ si ottengono attraverso il I PRINCIPIO applicato successivamente a partire dall'ordinale $\omega \cdot 2$;

$\omega \cdot 3$ si ottiene attraverso il II PRINCIPIO:

$$\omega \cdot 3 = \lim((\omega \cdot 2) + \alpha_n)$$

dove $\{\alpha_n\}$ è la successione (numerabile) di tutti gli ordinali finiti;

$(\omega \cdot 3) + 1, \ldots$

$(\omega \cdot 4), \ldots$

ω^2 si ottiene attraverso il II PRINCIPIO:

$$\omega^2 = \lim(\omega \cdot \alpha_n)$$

dove $\{\alpha_n\}$ è la successione (numerabile) di tutti gli ordinali finiti;

$\omega^2 + 1, \ldots$

$\omega^2 \cdot 2, \ldots$

$\omega^2 \cdot 3, \ldots$

ω^3 si ottiene attraverso il II PRINCIPIO:

$$\omega^3 = \lim(\omega^2 \cdot \alpha_n)$$

dove $\{\alpha_n\}$ è la successione (numerabile) di tutti gli ordinali finiti;

$\omega^4, \ldots$

${}^2\omega = \omega^\omega$ si ottiene[1] attraverso il II PRINCIPIO:

$$\omega^\omega = \lim(\omega^{\alpha_n})$$

dove $\{\alpha_n\}$ è la successione (numerabile) di tutti gli ordinali finiti;

$\omega^\omega + 1, \ldots$

$\omega^\omega \cdot 2, \ldots$

$\omega^{\omega + 1}, \ldots$

$\omega^{\omega \cdot 2}, \ldots$

$\omega^{\omega^2}, \ldots$

[1] Si è indicato, e si indicherà in seguito, con la scrittura

$${}^a b$$

la potenza di b elevato alla b, elevato alla b, elevato alla b, ... a volte. Con questa notazione si ha:

$${}^2 2 = 4,\ {}^3 2 = 16,\ {}^4 2 = 64536, \ldots$$
$${}^2 3 = 27,\ {}^3 3 = 7625597484987, \ldots$$
$${}^2 10 = 10000000000,\ {}^3 10 = 10^{10000000000}, \ldots$$

$^{3}\omega = \omega^{\omega^{\omega}}$ si ottiene attraverso il II PRINCIPIO:

$$\omega^{\omega^{\omega}} = \lim\left(\omega^{\omega^{\alpha_n}}\right)$$

dove $\{\alpha_n\}$ è la successione (numerabile) di tutti gli ordinali finiti;

...

$^{\omega}\omega$ si ottiene attraverso il II PRINCIPIO:

$$^{\omega}\omega = \lim\left(^{\alpha_n}\omega\right)$$

dove $\{\alpha_n\}$ è la successione (numerabile) di tutti gli ordinali finiti;

...

Costruiti i numeri ordinali della seconda classe numerica, nel sedicesimo paragrafo[1] Cantor cerca quale numero cardinale corrisponda a tale classe e dimostra che non vi è alcun numero cardinale che sia contemporaneamente maggiore di $\aleph_0$ e minore della cardinalità della seconda classe numerica.

TEOREMA 20:

La potenza della seconda classe numerica è il secondo numero cardinale transfinito $\aleph_1$.

DIMOSTRAZIONE[2]:

Sia S la seconda classe numerica, ovvero:

$$S = \{a \mid \text{esiste } A \text{ con } Card(A) = \aleph_0 \text{ e } Ord(A) = a\}.$$

Si deve dimostrare che

$$\aleph_0 < Card(S)$$

e che non esiste alcun insieme B tale che si abbia

$$\aleph_0 < Card(B) < Card(S).$$

1. Si voglia dimostrare che $\aleph_0 < Card(S)$; è chiaro che S è infinito, quindi

$$Card(S) \geq \aleph_0;$$

basta allora dimostrare che $Card(S) \neq \aleph_0$. A tal fine si procede per assurdo, supponendo che S sia numerabile e che dunque possa essere riordinato in successione:

---

[1] [Cantor 1895 - 1897], pagg. 330 - 333

[2] Non avendo riportato tutti i teoremi dei paragrafi precedenti, tale dimostrazione risulta qui incompleta e alcuni passi saranno giustificati non del tutto rigorosamente. Per una migliore trattazione si rimanda a [Cantor 1895 - 1897]

$$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, ..., \alpha_n, ...\}$$

Siano ora

$$i(1) = 1,$$

$$i(2) = \min\{j = 1, 2, ..., n, ... \mid \alpha_1 \angle \alpha_j\}, ...$$

$$i(n) = \min\{j = 1, 2, ..., n, ... \mid \alpha_{i(n-1)} \angle \alpha_j\}, ...$$

In questo modo si ottiene una successione infinita di numeri crescenti che ricopre tutta S:

$$S = \{\alpha_{i(1)}, \alpha_{i(2)}, \alpha_{i(3)}, \alpha_{i(4)}, ..., \alpha_{i(n)}, ...\}$$

$$\text{con} \quad i(1) < i(2) < i(3) < i(4) < ... < i(n) < ...,$$

$$\alpha_{i(1)} \angle \alpha_{i(2)} \angle \alpha_{i(3)} \angle \alpha_{i(4)} \angle ... \angle \alpha_{i(n)} \angle ...$$

$$\text{e con} \quad \alpha_j \angle \alpha_{i(j)} \quad \vee \quad \alpha_j = \alpha_{i(j)} \quad \text{per ogni } j = 1, 2, 3, ..., n, ...$$

In base al II Principio esisterà un ordinale

$$\alpha = \lim(\alpha_{i(j)})$$

della seconda classe tale che risulti maggiore di ogni $\alpha_{i(j)}$, ossia si ha

$$\alpha_{i(j)} \angle \alpha \quad \text{per ogni } j = 1, 2, 3, ..., n, ...$$

Ma essendo α un ordinale della seconda classe si ha $\alpha \in S$ e dunque dovrebbe esistere un indice j tale che si abbia

$$\alpha = \alpha_{i(j)}.$$

L'ipotesi che S sia numerabile porta dunque ad un assurdo e quindi Card(S) $\neq \aleph_0$. Se ne deduce che

$$\aleph_0 < \text{Card}(S).$$

2. Sia ora B' un sottinsieme infinito di S. Si vuole dimostrare che

$$\text{Card}(B') = \aleph_0 \quad \text{oppue} \quad \text{Card}(B') = \text{Card}(S).$$

La seconda classe numerica S risulta essere un insieme ben ordinato[1] dalla relazione $\angle$ e di conseguenza, dato B' $\subseteq$ S, esiste una biezione che conserva l'ordine che manda B' o in un segmento S_0 di S determinato da un elemento α_0 oppure in S stesso[2].

Se si verifica la seconda possibilità, allora è chiaro che

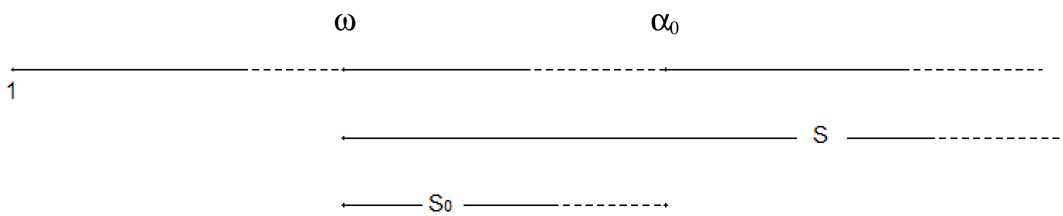
[1] Vedi teorema A) del sedicesimo paragrafo, in [Cantor 1895 - 1897], pag. 330
[2] Vedi teorema O) del quattordicesimo paragrafo, in [Cantor 1895 - 1897], pag. 320

$$\mathrm{Card}(B') = \mathrm{Card}(S).$$

Se invece si verifica la prima, allora esiste una biezione che conserva l'ordine tra B' e l'insieme $S_0 = \{\alpha \in S \mid \alpha \angle \alpha_0\}$ e dunque $\mathrm{Ord}(B') = \mathrm{Ord}(S_0)$. Ora, si ha che

$$\mathrm{Ord}(S_0) + \omega = \alpha_0;$$

tale affermazione è giustificata dal fatto che ω è il più piccolo ordinale della seconda classe e dunque in S_0 ci stanno tutti gli ordinali compresi tra ω e α_0:



Allora si ha anche

$$\mathrm{Ord}(B') + \omega = \alpha_0;$$

ora:

$$\text{se} \quad \mathrm{Ord}(A_0) = \alpha_0 \quad \text{allora (essendo } \alpha_0 \in S\text{)} \quad \mathrm{Card}(A_0) = \aleph_0$$

e così pure

$$\text{se } \mathrm{Ord}(A) = \omega \quad \text{allora (essendo } \omega \in S\text{)} \quad \mathrm{Card}(A) = \aleph_0.$$

Dunque si ottiene che $\aleph_0 \geq \mathrm{Card}(B')$. Ma essendo B' infinito si ha $\mathrm{Card}(B) \geq \aleph_0$ e dunque

$$\mathrm{Card}(B') = \aleph_0.$$

3. Sia ora B un insieme qualsiasi con

$$\mathrm{Card}(B) < \mathrm{Card}(S).$$

In base alla Definizione 5 esiste $B' \subseteq S$ tale che $\mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(B')$ e dunque si avrebbe $\mathrm{Card}(B') < \mathrm{Card}(S)$. In base al punto (2.) allora non può essere

$$\mathrm{Card}(B) > \aleph_0.$$

■

A questo punto dovrebbe risultare chiaro come sia possibile costruire nuovi ordinali e nuovi cardinali.

Deteminati i numeri ordinali della seconda classe numerica risulta dato il cardinale $\aleph_1$; a questo punto si potrà passare agli ordinali della *terza classe numerica* estendendo il II

PRINCIPIO a successioni fondamentali non più numerabili, bensì di cardinalità $\aleph_1$. Con un teorema analogo al TEOREMA 20 si otterrà che

$$\aleph_2 = \text{Card}\,(\{x \mid \text{esiste } X \text{ con Card}(X) = \aleph_1 \text{ e Ord}(X) = x\})$$

e allora si potranno costruire gli ordinali della *quarta classe numerica* con una ulteriore estensione del II PRINCIPIO.

Iterando questo processo per ogni ordinale α si avrà

$$\aleph_\alpha = \text{Card}\,(\{x \mid \text{esiste } X \text{ con Card}(X) = \aleph_{\alpha\text{-}1} \text{ e Ord}(X) = x\}).$$

Alcuni problemi irrisolti

Rimangono a questo punto alcuni problemi irrisolti, tra i quali due di particolare rilevanza.

Il primo riguarda, ancora una volta, la classificazione dei cardinali: preso un cardinale qualsiasi, esso compare nell'elenco degli alef? Ovvero: dato un insieme qualsiasi A, esiste un ordinale α tale che Card(A) = $\aleph_\alpha$, con $\aleph_\alpha$ costruito in base alle indicazioni precedenti? A questo problema è collegato quello della tricotomia, ovvero: dati comunque due insiemi B e C, i loro cardinali sono confrontabili? Cioè: è possibile dimostrare che per ogni B e C si verifica una (ed una sola) delle seguenti possibilità

$$\text{Card}(B) = \text{Card}(C), \quad \text{Card}(B) < \text{Card}(C), \quad \text{e} \quad \text{Card}(B) > \text{Card}(C)?$$

L'analogia tra i due quesiti precedenti sta nel fatto che ad entrambi si può rispondere positivamente nel caso che si prendano in considerazione solo insiemi A, B, C, ... ben ordinati. Ma ogni insieme può essere bene ordinato? La risposta data da Cantor in una lettera a Dedekind[1] è affermativa, ma la dimostrazione che egli dà di questo fatto è poco convincente. Sarà Zermelo che individuerà nell'assioma di scelta la chiave per poter risolvere questa questione.

Il secondo problema riguarda in particolare il rapporto tra gli alef e la cardinalità del continuo. Nel TEOREMA 18 si è dimostrato che $c = 2^{\aleph_0}$. Cantor fece l'ipotesi, divenuta nota come *ipotesi del continuo*, che si abbia $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, ma, pur essendo convinto di tale congettura già dal 1878, non ne trovò una dimostrazione realmente convincente.

[1] [Cantor - Dedekind], lettera di Cantor a Dedekind del 28 luglio 1899, tradotta in [Arzarello 1980], pagg. 335 - 341

Può essere interessante riportare il giudizio di Zermelo a proposito di questi ultimi risultati non raggiunti: "L'ultima pubblicazione[1] di Cantor sulla teoria degli insiemi costituisce realmente la conclusione del lavoro di tutta una vita. Qui i concetti fondamentali e le idee, quali si sono a poco a poco sviluppati nel corso di decenni, trovano la sistemazione definitiva mentre molti teoremi della teoria 'generale' degli insiemi affondano qui le loro radici. A parte alcune imperfezioni e oscurità nelle definizioni fondamentali, [...] bisogna davvero rammaricarsi che Cantor, in seguito a malattie e difficoltà obiettive, non sia stato in grado di continuare il lavoro nel modo stabilito e che anche quest'ultima pubblicazione, come quella [...] sulle varietà infinite lineari di punti[2], non è stata portata a pieno compimento. Come là non si raggiunge la meta ultima di dimostrare che il continuo ha la seconda potenza così qui manca la dimostrazione che ogni insieme può essere ben ordinato e quindi che ogni cardinale è un alef, ciò che costituirebbe l'autentica conclusione della teoria dei cardinali"[3].

A proposito di questi problemi non risolti non si può non ricordare il titolo della tesina dell'esame di laurea sostenuto da Cantor nel 1867: *In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi*.

Alcuni sviluppi

Le questioni proposte da Cantor trovarono risposta, non senza fatica, nella matematica del Novecento. Secondo Arzarello[4] "i lavori di teoria degli insiemi subito dopo Cantor consistettero in gran parte in una risistemazione e chiarificazione dell'edificio cantoriano resasi necessaria con la scoperta delle antinomie: ciò portò a definire in modo più preciso gli strumenti da lui usati, il che rese possibile affrontare con tecniche più fini i problemi lasciati insoluti"[5].

A grandi linee potremmo dire che la risistemazione dell'edificio cantoriano avvenne attraverso l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi e che, tra i problemi che trovarono

[1] Si tratta di [Cantor 1895 - 1897]
[2] Si tratta di [Cantor 1879 - 1884]
[3] Citato in [Arzarello 1980], pag. 74
[4] Cfr. [Arzarello 1980]
[5] [Arzarello 1980], pagg. 83 e 84

risoluzione, un posto fondamentale occupano quelli del principio del buon ordinamento e dell'ipotesi del continuo.

Assiomatizzazioni della teoria degli insiemi

Il sistema ZF

L'assiomatizzazione moderna probabilmente più diffusa della teoria degli insiemi è dovuta ai lavori di Zermelo, perfezionati poi da Skolem, Fraenkel e von Neumann. Senza fare distinzione tra i contributi dell'uno o dell'altro, si propone di seguito la base del sistema assiomatico comunemente indicato con ZF, ponendo l'attenzione su quegli aspetti direttamente connessi alle problematiche dell'infinito.

ASSIOMA DI ESTENSIONALITÀ:

$$\forall x\ \forall y\ (\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

ASSIOMA DELL'INSIEME VUOTO:

$$\exists y\ \forall x\ (x \notin y).$$

TEOREMA:

Siano y_1 e y_2 tali che $\forall x\ (x \notin y_1)$ e $\forall x\ (x \notin y_2)$. Allora $y_1 = y_2$.

DIMOSTRAZIONE:

Poiché $\forall x\ (x \notin y_1)$, si ha che $\forall x\ (x \in y_1 \rightarrow x \in y_2)$; analogamente poiché $\forall x\ (x \notin y_2)$, si ha che $\forall x\ (x \in y_2 \rightarrow x \in y_1)$. Se ne conclude che $\forall x\ (x \in y_1 \leftrightarrow x \in y_2)$ e dunque, grazie all'ASSIOMA DI ESTENSIONALITÀ, si ottiene $y_1 = y_2$.

■

DEFINIZIONE:

L'insieme y tale che $\forall x\ (x \notin y)$, la cui esistenza è assicurata dall'ASSIOMA DELL'INSIEME VUOTO e la cui unicità è dimostrata nel teorema precedente, è detto *insieme vuoto* e si indica con $\varnothing$.

DEFINIZIONE:

Si definisce la relazione di *inclusione* $\subseteq$ ponendo:

$$\forall x\ \forall y\ (x \subseteq y \leftrightarrow \forall u\ (u \in x \rightarrow u \in y)).$$

ASSIOMA DELL'INSIEME DELLE PARTI:

$$\forall z\, \exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \subseteq z).$$

TEOREMA:

Dato un insieme z, siano y_1 e y_2 tali che $\forall x\, (x \in y_1 \leftrightarrow x \subseteq z)$ e che $\forall x\, (x \in y_2 \leftrightarrow x \subseteq z)$. Allora $y_1 = y_2$.

DIMOSTRAZIONE:

Si ha che per ogni x: $(x \in y_1 \rightarrow x \subseteq z)$ e $(x \subseteq z \rightarrow x \in y_2)$

e dunque $(x \in y_1 \rightarrow x \in y_2)$.

Analogamente, per ogni x: $(x \in y_2 \rightarrow x \subseteq z)$ e $(x \subseteq z \rightarrow x \in y_1)$

e dunque $(x \in y_2 \rightarrow x \in y_1)$.

Allora, per l'ASSIOMA DI ESTENSIONALITÀ, si ha $y_1 = y_2$.

■

DEFINIZIONE:

Dato un insieme z, l'insieme y tale che $\forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \subseteq z)$, la cui esistenza è assicurata dall'ASSIOMA DELL'INSIEME DELLE PARTI e la cui unicità è dimostrata nel teorema precedente, è detto *insieme delle parti* di z e si indica con $\mathcal{P}(z)$.

ASSIOMA DELL'INSIEME UNIONE:

$$\forall z\, \exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \exists u\, (u \in z \wedge x \in u)).$$

Questo assioma assicura la possibilità di costruire un nuovo insieme come "unione" di altri insiemi dati; è proprio per non rischiare di creare un tutt'uno troppo grande, che si richiede, per fare l'unione di certi insiemi, che essi siano elementi di un altro insieme dato z. In questo modo l'unione dipende da questo z (che è un solo oggetto), piuttosto che da tutti i suoi elementi (che potrebbero essere tanti, troppi, ...).

TEOREMA:

Dato un insieme z, siano y_1 e y_2 tali che

$$\forall x\, (x \in y_1 \leftrightarrow \exists u\, (u \in z \wedge x \in u)) \quad \text{e} \quad \forall x\, (x \in y_2 \leftrightarrow \exists u\, (u \in z \wedge x \in u)).$$

Allora $y_1 = y_2$.

DIMOSTRAZIONE:

Si ha che per ogni x:

$$(x \in y_1 \;\rightarrow\; \exists u\,(u \in z \wedge x \in u)) \quad \text{e} \quad (\exists u\,(u \in z \wedge x \in u) \;\rightarrow\; x \in y_2)$$

e dunque $(x \in y_1 \;\rightarrow\; x \in y_2)$.

Analogamente, per ogni x:

$$(x \in y_2 \;\rightarrow\; \exists u\,(u \in z \wedge x \in u)) \quad \text{e} \quad (\exists u\,(u \in z \wedge x \in u) \;\rightarrow\; x \in y_1)$$

e dunque $(x \in y_2 \;\rightarrow\; x \in y_1)$.

Allora, per l'Assioma di Estensionalità, si ha $y_1 = y_2$.

■

Definizione:

Dato un insieme z, l'insieme y tale che $\forall x\,(x \in y \;\leftrightarrow\; \exists u\,(u \in z \wedge x \in u))$, la cui esistenza è assicurata dall'Assioma dell'Insieme Unione e la cui unicità è dimostrata nel teorema precedente, è detto *insieme unione* di z e si indica con $\bigcup z$.

Assioma di rimpiazzamento:

Sia $\mathcal{R}(x, y)$ un predicato in due variabili tale che

$$\forall x\; \forall y_1\; \forall y_2\; ((\mathcal{R}(x, y_1) \;\wedge\; \mathcal{R}(x, y_2)) \;\rightarrow\; y_1 = y_2);$$

allora

$$\forall z\; \exists u\; \forall y\; (y \in u \;\leftrightarrow\; \exists x\,(x \in z \;\wedge\; \mathcal{R}(x, y))).$$

Teorema (Principio di Accoppiamento):

$$\forall a\; \forall b\; \exists! c\; \forall y\; (y \in c \;\leftrightarrow\; (y = a \;\vee\; y = b)).$$

Dimostrazione:

Dati a e b si consideri il predicato $\mathcal{R}(x, y)$ dato da:

$$(x = \varnothing \;\wedge\; y = a) \;\vee\; (x = \mathcal{P}(\varnothing) \;\wedge\; y = b).$$

Se fosse

$$((x = \varnothing \;\wedge\; y_1 = a) \;\vee\; (x = \mathcal{P}(\varnothing) \;\wedge\; y_1 = b)) \;\wedge$$
$$\wedge\; ((x = \varnothing \;\wedge\; y_2 = a) \;\vee\; (x = \mathcal{P}(\varnothing) \;\wedge\; y_2 = b))$$

si otterrebbe

$$((x{=}\varnothing \wedge y_1{=}a \wedge x{=}\varnothing \wedge y_2{=}a) \vee (x{=}\varnothing \wedge y_1{=}a \wedge x{=}\mathcal{P}(\varnothing) \wedge y_2{=}b)) \vee$$
$$\vee ((x{=}\mathcal{P}(\varnothing) \wedge y_1{=}b \wedge x{=}\varnothing \wedge y_2{=}a) \vee (x{=}\mathcal{P}(\varnothing) \wedge y_1{=}b \wedge x{=}\mathcal{P}(\varnothing) \wedge y_2{=}b))$$

da cui, essendo $\varnothing \neq \mathcal{P}(\varnothing)$, si ottiene che

$$(x=\emptyset \wedge y_1=a \wedge y_2=a) \vee (x=\mathcal{P}(\emptyset) \wedge y_1=b \wedge y_2=b))$$

da cui in particolare $y_1 = y_2$. Si può allora applicare a tale predicato l'ASSIOMA DI RIMPIAZZAMENTO: preso $z = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ tale assioma ci dice che esiste u tale che

$$\forall y\, (y\in u \leftrightarrow \exists x\, (x\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \wedge \mathcal{R}(x, y))).$$

Posto c = u si verifica che c ha la proprietà richiesta dalla tesi ed inoltre si dimostra, grazie all'ASSIOMA DI ESTENSIONALITÀ, che c è unico.

■

Per ogni a e per ogni b, l'insieme c di cui al teorema precedente si indica con {a, b}. Si pone inoltre {a} = {a, a}.

TEOREMA (PRINCIPIO DI SEPARAZIONE):

Sia $\mathcal{Q}(x)$ un predicato in una variabile e a un insieme. Allora esiste uno ed un solo insieme b tale che

$$\forall x\, (x\in b \leftrightarrow (x\in a \wedge \mathcal{Q}(x))).$$

DIMOSTRAZIONE:

Fissato a si consideri il predicato $\mathcal{R}(x, y)$ dato da:

$$(x = y) \wedge \mathcal{Q}(y)$$

Se fosse

$$((x = y_1) \wedge \mathcal{Q}(y_1)) \wedge (x = y_2) \wedge \mathcal{Q}(y_2)$$

si otterrebbe evidentemente $y_1 = y_2$. Si può allora applicare a tale predicato l'ASSIOMA DI RIMPIAZZAMENTO: preso z = a tale assioma ci dice che esiste u tale che

$$\forall y\, (y\in u \leftrightarrow \exists x\, (x\in a \wedge \mathcal{R}(x, y))).$$

Posto b = u si verifica che c ha la proprietà richiesta dalla tesi ed inoltre si dimostra, grazie all'ASSIOMA DI ESTENSIONALITÀ, che b è unico.

■

Per ogni a e per ogni predicato $\mathcal{Q}$, l'insieme b di cui al teorema precedente si indica con

$$\{x\in a \mid \mathcal{Q}(x)\}.$$

Anche a proposito dell'ASSIOMA DI RIMPIAZZAMENTO, e in particolare del PRINCIPIO DI SEPARAZIONE che da esso si dimostra, si può osservare la stessa particolarità notata per l'ASSIOMA DELL'INSIEME UNIONE. Non si riesce infatti a dimostrare che per ogni predicato $\mathcal{Q}$, si può costruire l'insieme $\{Q(x)\}$ di tutti gli oggetti x di cui si può dire $Q(x)$: occorre che ci sia un insieme già costruito a, entro cui separare gli elementi per i quali si ha $Q(x)$ da tutti gli altri.

Legato a ciò è anche il fatto che il Principio di Separazione permette di dimostrare che non esiste l'insieme universale: preso comunque un insieme, esisterà un oggetto che non gli appartiene.

Teorema:

$$\forall y\, \exists x\, (x \notin y).$$

Dimostrazione:

Fissato y, vogliamo dimostrare che posto

$$x = \{u \in y \mid u \notin u\}$$

si ha che $x \notin y$. Supponiamo per assurdo che sia $x \in y$; sono possibili due casi: o $x \in x$, oppure $x \notin x$.

1. Se $x \in x$ allora $x \notin x$, il che è assurdo.
2. Se $x \notin x$ allora $x \in x$, il che è assurdo.

■

Grazie al Principio di Separazione si può costruire una molteplicità di insiemi, purché siano sottinsiemi di qualche insieme noto. Si può, ad esempio, costruire l'intersezione di una famiglia di insiemi, come sottinsieme dell'unione della famiglia stessa (la cui esistenza è assicurata dall'Assioma dell'Insieme Unione).

Teorema:

$$\forall f\, (f \neq \emptyset) \rightarrow (\exists! i\, \forall y\, ((y \in i) \leftrightarrow \forall g\, (g \in f \rightarrow y \in g))).$$

Dimostrazione:

Basta porre

$$i = \{y \in \bigcup f \mid \forall g\, (g \in f \rightarrow y \in g)\}.$$

■

L'insieme i di cui al teorema precedente si indica con $\bigcap f$.

Definizione:

Si definisce l'*unione* di due insiemi x e y ponendo:

$$\forall x\ \forall y\ (x \cup y) = \bigcup\{x, y\}.$$

Si definisce l'*intersezione* di due insiemi x e y ponendo:

$$\forall x\ \forall y\ (x \cap y) = \bigcap\{x, y\}.$$

Gli assiomi fin ora introdotti assicurano l'esistenza dell'insieme vuoto e di alcuni altri insiemi da esso derivati, purché (in base agli assiomi così detti limitativi) non siano troppo grandi.

A questo punto c'è bisogno, se si vuole fare una teoria che comprenda gli insiemi infiniti, di un assioma che ne garantisca l'esistenza.

Assioma dell'Infinito:

$$\exists x\ (\varnothing \in x\ \wedge\ \forall y\ (y \in x\ \rightarrow\ y \cup \{y\} \in x)).$$

Quest'assioma ci dà la possibilità di considerare l'insieme infinito

$$\{\varnothing;\ \{\varnothing\};\ \{\varnothing,\{\varnothing\}\};\ \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\};\ \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\ \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\};\ \ldots\}$$

che risulta essere la controparte insiemistica dei numeri naturali. L'infinito la cui esistenza è assicurata da questo assioma è un infinito numerabile: se si arriva a postulare l'esistenza di questo, poi tutte gli altri cardinali vengono di conseguenza, senza bisogno che altri assiomi debbano garantire l'esistenza di insiemi con cardinalità più che numerabile.

C'è bisogno, invece, di un altro assioma se su questi cardinali si vuol dire qualcosa di più "preciso". Ad esempio, già nel Teorema 13 si è visto che, per dimostrare che $\aleph_0$ è il più piccolo cardinale transfinito, occorre far uso dell'Assioma di Scelta, o di qualche principio ad esso equivalente. Ci soffermeremo su altri aspetti della teoria degli insiemi in cui tale assioma gioca un ruolo dominante nel prossimo paragrafo.

Assioma di Scelta:

$$\forall z\ (\forall x\ (x \in z\ \rightarrow\ (x \neq \varnothing\ \wedge\ \forall y\ (y \in z\ \rightarrow\ x \cap y = \varnothing\ \vee\ x = y))))\ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ \exists u\ \forall x\ \exists v\ (x \in z\ \rightarrow\ u \cap x = \{v\}).$$

Lo scopo dell'ultimo assioma della teoria ZF è quello di impedire che esistano insiemi appartenenti a se stessi e, più in generale, che si verifichino situazioni come le seguenti:

$$x \in x_1 \in x_2 \in \ldots \in x_n \in x$$

$$\ldots \in x_{n+1} \in x_n \in x_{n-1} \in \ldots \in x_3 \in x_2 \in x_1.$$

Tali situazioni infatti, pur essendo ammissibili in base agli assiomi fin ora introdotti, sono ritenute estranee agli sviluppi della teoria degli insiemi.

ASSIOMA DI FONDAZIONE:

$$\forall x\,(x \neq \varnothing \ \rightarrow\ \exists y\,(y \in x \ \wedge\ y \cap x = \varnothing)).$$

TEOREMA:

$$\forall t\,(t \notin t).$$

DIMOSTRAZIONE:

Sia t un insieme e supponiamo per assurdo che sia $t \in t$.

1. Se fosse $t = \varnothing$, si otterrebbe $t \in \varnothing$, il che è assurdo per l'ASSIOMA DELL'INSIEME VUOTO.

2. Sia allora $t \neq \varnothing$. Per quanto visto anche $\{t\}$ è un insieme ed inoltre $\{t\} \neq \varnothing$, perché $t \in \{t\}$. Allora, per l'ASSIOMA DI FONDAZIONE, si ha che

$$\exists y\,(y \in \{t\} \ \wedge\ y \cap \{t\} = \varnothing).$$

Ora, da $y \in \{t\}$ si ricava che $y = t$; ma allora, dovendo essere $y \cap \{t\} = \varnothing$, si ottiene che $t \cap \{t\} = \varnothing$.

Ciò è assurdo, poiché essendo $t \in t$ per ipotesi e $t \in \{t\}$ si ha

$$t \cap \{t\} = t \neq \varnothing.$$

■

Il sistema NBG

Il sistema ZF non è l'unico che è stato creato per l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi. In particolare se ne presenta qui un altro, per quanto sommariamente, che dà l'occasione per riflettere sull'infinito in una direzione che fin ora non è stata mai accennata [1].

[1] Si tratta dell'infinito visto non dall'interno della teoria che si sta trattando, bensì da un punto di vista metateorico. Le problematiche esistenti a questo livello sono molteplici e fondamentali. Purtroppo ci si deve limitare qui esclusivamente ad un cenno.
Una prima questione è quella sugli assiomi della teoria: si vedrà nelle righe seguenti che esistono teorie che hanno un numero finito di assiomi e altre teorie che ne hanno infiniti: sono accettabili tanto le une quanto le altre? ha senso cercare di controllare (e magari di eliminare il più possibile) l'infinito come attributo degli enti della teoria quando magari essa stessa si fonda necessariamnte su infiniti assiomi?
Un altro problema riguarda le definizioni: quando si ha a che fare con definizioni impredicative o circolari si introduce in qualche modo un procedimento all'infinito nella teoria, che va chiaramente controllato. Questa questione è approfondita, insieme ad altre riguardanti le definizioni, nella appendice B.

Si consideri l'Assioma di Rimpiazzamento così come compare nel sistema ZF: esso fa riferimento ad un qualsiasi predicato in due variabili $\mathcal{R}(x, y)$ tale che $\forall x \ \forall y_1 \ \forall y_2 \ ((\mathcal{R}(x, y_1) \wedge \mathcal{R}(x, y_2)) \rightarrow y_1 = y_2)$; ora, di predicati di questo tipo ve ne sono sicuramente infiniti e, di conseguenza, questo assioma è in realtà uno *schema* di infiniti assiomi. Il sistema ZF è dunque *non finitamente assiomatizzato*, nel senso appunto che è in realtà fondato su infiniti assiomi: l'infinito si impone non solo dall'interno della teoria degli insiemi, ma anche "dal di sopra" di essa; non solo ci sono infiniti insiemi e insiemi con infiniti elementi, bensì, nel sistema ZF, anche infiniti assiomi.

Un accostamento alternativo alla teoria degli insiemi è quello basato sui lavori di von Neumann, Bernays e Gödel. A tale sistema, che si indicherà nel seguito con NBG, si fa generalmente riferimento come *teoria delle classi*. Scrive Beth[1]: "I sistemi del tipo von Neumann-Bernays-Gödel si distinguono da quelli del tipo Zermelo-Fraenkel per l'ammissione, accanto agli insiemi, di *classi* che non sono necessariamente degli insiemi. Le classi corrispondono alle moltitudini in senso ingenuamente intuitivo; certe classi sono *comprimibili* (questa felice espressione fu introdotta da H. Hermes) di modo che esse possono presentarsi come *elementi* di una classe; una classe siffatta è detta un *insieme*. Per le classi si introducono postulati di esistenza assai liberali; le restrizioni imposte all'ammissione di una classe quale insieme figurano in tali sistemi per sfuggire alle antinomie"[2].

NBG risulta essere una estensione conservativa di ZF, il che significa che ZF e NBG sono equiconsistenti e che in NBG non si può provare alcun teorema che non si possa già provare in ZF. Ciò che rende interessante il sistema NBG in questo contesto è il fatto che esso, a differenza di ZF, è *finitamente assiomatizzato*: in esso non compaiono, cioè, che un

---

La problematica dell'infinito si presenta poi anche quando ci si avvicini alla teoria della dimostrazione; solitamente per dimostrazione si intende una successione *finita* di passaggi che permettono, attraverso l'applicazione di determinate regole logiche, di passare da un enunciato ad un altro: ma è chiaro che andrebbe meglio definito cosa si intende per finito o infinito in questo contesto.
Un altro campo in cui si impongono problematiche connesse con l'infinito è quello della dimostrazione di non contraddittorietà delle teorie matematiche. Nei primi anni del 1900 il programma di Hilbert mirava a fornire una dimostrazione *finitista* di non contraddittorietà per le teorie matematiche formalizzate; il teorema di incompletezza di Gödel (nella cui dimostrazione ricompare il cosiddetto 'metodo della diagonale' utilizzato da Cantor per provare la non numerabilità dei reali) nel 1931 provò la non realizzabilità di tale programma.

[1] Cfr. [Beth 1955]

[2] [Beth 1955], pag. 179

numero finito d'assiomi[1]. L'idea attraverso la quale si giunge a questo risultato è quella di sostituire allo schema di assiomi del tipo "per ogni predicato in due variabili $\mathcal{R}(x, y)$ tale che... esiste l'insieme..." un numero finito di regole di costruzione di insiemi corrispondenti non a tutte le formule, bensì esclusivamente a quelle predicative. Si riportano qui di seguito questi otto assiomi:

B.1. $\exists A\ \forall x\ \forall y\ (<x, y> \in A \leftrightarrow x \in y)$

B.2. $\forall A\ \forall B\ \exists C\ \forall x\ (x \in C \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B))$

B.3. $\forall A\ \exists B\ \forall x\ (x \in B \leftrightarrow x \notin A)$

B.4. $\forall A\ \exists B\ \forall x\ (x \in B \leftrightarrow \exists y\ (<y, x> \in A))$

B.5. $\forall A\ \exists B\ \forall x\ \forall y\ (<y, x> \in B \leftrightarrow y \in A)$

B.6. $\forall A\ \exists B\ \forall x\ \forall y\ (<x, y> \in B \leftrightarrow <y, x> \in A)$

B.7. $\forall A\ \exists B\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (<x, <y, z>> \in B \leftrightarrow <y, <z, x>> \in A)$

B.8. $\forall A\ \exists B\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (<x, <y, z>> \in B \leftrightarrow <x, <z, y>> \in A)$.

Buon ordinamento, legge di tricotomia, assioma della scelta e ipotesi del continuo

Dopo aver considerato la risistemazione dell'edificio cantoriano attraverso alcune possibili assiomatizzazioni della teoria degli insiemi, si cercherà di dare dei cenni sugli sviluppi di quei problemi posti da Cantor ma da lui non del tutto risolti: quello della possibilità di ben ordinare ogni insieme, quello della confrontabilità tra numeri cardinali, e l'ipotesi del continuo.

Nel 1904 Zermelo dà una dimostrazione del fatto che su ogni insieme si può stabilire una relazione d'ordine rispetto alla quale esso possa considerarsi ben ordinato. Il cosiddetto p*rincipio del buon ordinamento* diventa così un teorema, la dimostrazione del quale si basa sull'assioma di scelta: per dare un buon ordinamento a un insieme M, Zermelo considera l'insieme dei sottinsiemi non vuoti di M e associa a ciascuno di essi un suo elemento, detto elemento "scelto" del sottinsieme. L'assioma di scelta serve per asserire l'esistenza di una funzione f che ad ogni sottinsieme non vuoto $x \subseteq M$ associ l'elemento scelto $f(x) \in x$, ma

[1] Un'altra caratteristica di NBG è che in esso si assume l'astrazione limitata alle formule predicative (si veda, a questo proposito, l'appendice B).

non fornisce alcuna indicazione su come costruire effettivamente la *f*. Questo carattere non costruttivo è dunque ereditato anche dal teorema del buon ordinamento: esso afferma sì che ogni insieme può essere ben ordinato, ma non indica come definire la relazione d’ordine che lo rende tale[1].

Nel 1915 Hartogs dimostra che l’assioma della scelta, il principio del buon ordinamento e la legge di tricotomia per i numeri cardinali costituiscono in ZF*[2] enunciati equivalenti[3].

I risultati successivi riguardano il rapporto esistente tra ZF*, l’assioma della scelta e l’ipotesi del continuo. Nel 1940 Kurt Gödel, in un lavoro frutto delle ricerche degli anni precedenti, pubblica la dimostrazione del fatto che l’assioma della scelta e l’ipotesi generalizzata del continuo[4] sono coerenti con ZF*; ciò significa che da ZF* non si può dedurre né la negazione dell’ipotesi del continuo, né quella dell’assioma della scelta[5]. Nel 1963 Paul Cohen dimostra inoltre che anche le negazioni dell’assioma della scelta e dell’ipotesi generalizzata del continuo sono coerenti con ZF*; ovvero egli dimostra che ZF* non implica né l’assioma della scelta, né l’ipotesi del continuo[6].

[1] Fu proprio questo carattere di non costruttività a suscitare accesi dibattiti tra i matematici. Per ulteriori commenti su queste problematiche si veda [Borga - Palladino 1997], pagg. 83 e segg.

[2] Indicheremo con ZF* il sistema ZF privato dell’assioma della scelta.

[3] Cfr. [Beth 1955], pag. 166

[4] L’ipotesi del continuo, ovvero l’ipotesi che si abbia $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, può essere generalizzata nell’ipotesi che per ogni numero ordinale α si abbia $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_{\alpha-1}}$.

[5] Il lavoro di Gödel in questione è [Gödel 1940]; una versione divulgativa dei risultati ottenuti i trova in [Gödel 1947].

[6] I risultati di Cohen sono pubblicati in [Cohen 1963]; una esposizione divulgativa si trova in [Cohen -Hersch 1968].