2.2.2. Altri esempi

L'esposizione della teoria dei numeri transfiniti di Cantor è probabilmente sufficiente per chiarire il significato e il valore dell'infinito in atto per la matematica. Eppure non si possono non considerare (quanto meno solo accennandovi) alcuni altri esempi in cui emerge una concezione attuale dell'infinito. In particolare è interessante e doveroso guardare all'analisi: in primo luogo essa mostra come l'infinito in atto sia presente non solo in teorie fondazionali (come potrebbe essere considerata la teoria degli insiemi), bensì anche negli sviluppi posteriori della matematica; in secondo luogo l'analisi mostra, come accenneremo, il "fallimento" di alcuni dei tentativi di eliminare del tutto l'infinito in atto per sostituirlo con quello potenziale.

Gli inizi del calcolo infinitesimale

Agli inizi del 1600 vengono scoperte le regole fondamentali di differenziazione e di integrazione, da parte di matematici come Keplero, Galileo, Fermat e Barrow: spinti per lo più dai problemi posti dalla fisica e dall'astronomia essi sviluppano un calcolo infinitesimale attraverso l'uso di ragionamenti informali che utilizzano quantità infinitesime.

Sono poi Newton e Leibniz a organizzare in un tutto unitario i più importanti risultati tra tutti quelli precedentemente ottenuti. Keisler[1] schematizza in questo modo i diversi metodi che essi utilizzano per descrivere la derivata di y rispetto ad x:

METODO DEGLI INFINITESIMI:	la derivata è il rapporto tra una variazione infinitesima di y e una variazione infinitesima di x;
METODO DEL LIMITE:	la derivata è il limite del rapporto tra una variazione di y e la variazione di x, $\Delta y/\Delta x$, quando Δx tende a zero;
METODO DELLA VELOCITÀ:	la derivata è la velocità, con y che denota lo spazio e x che denota il tempo.

Newton, soprattutto nei suoi ultimi scritti, abbandona il primo metodo per gli altri due, mentre Leibniz, dal canto suo, sembra preferire piuttosto consistentemente il metodo degli

[1] Cfr. [Keisler 1976], pag. 873

infinitesimi. Non si può dire che egli sia del tutto privo di preoccupazioni a riguardo del proprio modo di utilizzare quantità infinitamente piccole; egli stesso infatti si preoccupa di sottolineare come, nonostante tutto, l'infinito vada comunque inteso in senso sincategorematico, ovvero potenziale: "il reste toujours un infini syncategorématique, comme parle l'école, et il demeure vrai par exemple que 2 est autant que 1/1 + 1/2 + 1/4 +1/8 + ..., etc., ce qui est une série infinie dans laquelle toute les fractions dans les numérateurs sont 1 et les dénominateurs de progression géometrique double, sont comprises à la fois, quoiqu'on n'v emploie toujours que des nombres ordinaires et quoiqu'on n'y fasse point entrer aucune mention infiniment petite, ou dont le denominateur soit un nombre infini"[1].

Eppure, anche solo considerando la notazione proposta da Leibniz, si capisce quanto egli (pur faticando ad ammetterlo) concepisca l'esistenza di un infinitesimo attuale: la scrittura dy/dx fa proprio pensare al rapporto tra due quantità attuali (Newton introduce invece la notazione $\dot{y}$, legata al metodo delle velocità, presente oggi quasi esclusivamente nei trattati di meccanica). Leibniz pensa all'infinitesimo come ad una quantità più piccola di qualsiasi quantità finita assegnabile, ma diversa da zero. L'esistenza non puramente potenziale di quantità cosi fatte è confermata dal modo con cui si giunge ad esse: non si tratta di un procedimento di limite (come quello che introdurrà Weierstrass) che permette di avvicinarsi indefinitamente allo zero senza mai raggiungerlo, bensì della "estrapolazione" all'infinito di concetti validi al finito. Scrive a questo proposito Zellini[2]: "Se si volesse ora dare un nome al meccanismo che ha reso possibile il raggiungimento dell'infinitesimo, ci si troverebbe costretti ad invocare il principio di continuità[3]. È proprio questo principio che in virtù della visibilità 'in concreto' della soluzione finale di una variazione (la retta tangente) rende significativo il rapporto dy/dx anche nel caso limite in cui dx = 0. L'ambiguità concettuale che si è sempre voluta scorgere nella definizione di infinitesimo è allora tutta nell'applicazione di questo principio; nel supporre che una certa configurazione si ponga

[1] Citato in [Robinson 1966], pag. 262

[2] Cfr. [Zellini 1980]

[3] "Se la differenza tra due casi o configurazioni può diminuire al di sotto di ogni livello effettivamente assegnabile in dati concreti, allora è necessario che tale differenza *possa trovarsi diminuita al di sotto di ogni quantità assegnata* anche in quelle configurazioni che non possono esistere 'in concreto' ma solamente cercate e immaginate come risultato di una variazione continua" ([Zellini 1980], pag. 149)

come ultimo caso, effettivamente raggiunto, di una successione infinita di casi intermedi[1]. [...] Leibniz concepì i suoi risultati come una sorta di estrapolazione all'infinito dei concetti riferibili al calcolo di successioni finite; e questi stessi risultati, ponendosi come la meta finale di un percorso illimitato, erano l'apparente dimostrazione dell'esistenza dell'infinito attuale"[2].

Si tratta pur sempre, per Leibniz, di una esistenza di secondo ordine, se così si può dire: gli infinitesimi esistono solo come "finzioni" utili al matematico, come entità immaginarie non necessariamente corrispondenti a delle realtà esterne alla mente umana. Egli scrive infatti: "D'où il s'ensuit, que si quelqu'un n'admet point des lignes infinies et infiniment petites à la rigueur méta physique et comme des choses réelles, il peut s'en servir sûrement comme des notions idéales qui abrègent le raisonnement, semblable à ce qu'on appelle racines imaginaires dans l'analyse commune (comme par exemple $\sqrt{-2}$). [...] Car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée, de sorte qu'on ne diffère du style d'Archimède que dans les expressions, qui sont plus directes dans notre méthode et plus conformes à l'art d'inventer"[3].

Eppure, anche se Leibniz si preoccupa delle implicazioni cui potrebbe portare l'ammissione dell'infinito attuale e da esse si ripara sostenendo che gli infinitesimi sono enti immaginari introdotti essenzialmente per la loro convenienza operativa, non si trattiene dal dire che se di finzioni si tratta, sono comunque "fictions bien fondées"[4]: per Leibniz "gli infiniti e infinitamente piccoli sono talmente fondati che tutto si fa nella geometria, e così pure nella natura, come se fossero delle perfette realtà"[5]. E ancora: "La perfezione dell'analisi dei trascendenti e della geometria ove entri la considerazione di qualche infinito sarebbe senza dubbio la più importante a causa dell'applicazione che se ne può fare alle operazioni della natura, che fa intervenire l'infinito in tutto ciò che essa fa"[6].

[1] Nell'esempio della derivata, i casi intermedi sono le rette passanti per due punti P e Q della curva considerata, con Q che si avvicina sempre più a P, mentre il caso ultimo è quello della retta tangente alla curva stessa nel punto P.
[2] [Zellini 1980], pag. 154
[3] Citato in [Robinson 1966], pag. 262
[4] Citato in [Robinson 1966], pag. 263
[5] Citato in [Zellini 1980], pag. 157
[6] Citato in [Zellini 1980], pag. 150

I numeri reali

Il concetto di infinitesimo è a questo punto dello sviluppo dell'analisi innegabilmente oscuro e troppo legato all'intuizione: è chiaramente comprensibile allora la preoccupazione dei matematici dell'Ottocento di rigorizzare questo ed altri concetti, come quello di continuità, di derivata, di integrale, di serie numerica, ecc. A permettere questa rigorizzazione è l'introduzione del concetto di limite e, più avanti, il metodo degli ε-δ.
In questo modo l'infinito attuale sembra venir completamente eliminato dall'analisi; eppure, proprio nello stesso periodo e per le stesse esigenze di rigore, esso ricompare occupando un posto forse più nascosto ma sicuramente anche più fondamentale. In modo particolare nella seconda metà dell'Ottocento si assiste infatti alla costruzione dei numeri reali a partire dai numeri naturali, procedimento noto come aritmetizzazione dell'analisi, e si verifica che in tutte le definizioni maturate in quegli anni (ad esempio quella di Dedekind, quella di Cantor - Méray e quella di Weierstrass) l'infinito attuale compare in modo inequivocabile.
Tra le caratterizzazioni dei numeri reali la più nota è sicuramente quella di Dedekind del 1872. In *Stetigkeit und irrationale Zahlen* egli considera l'insieme R dei numeri razionali e chiama *sezione* "ogni ripartizione del sistema R in due classi A_1, A_2 che goda soltanto di questa proprietà caratteristica che ogni numero della classe A_1 sia minore di ogni numro della classe A_2"[1]; è evidente che ogni numero razionale *r* individua (o produce) due sezioni (che Dedekind dice di non considerare come essenzialmente distinte): una costituita dalle classi A_1 di cui *r* è massimo e $A_2 = R \setminus A_1$; l'altra costituita dalle classi B_2 di cui *r* è minimo e $B_1 = R \setminus B_2$. Dedekind mostra poi "l'esistenza di infinite sezioni non prodotte da nessun numero razionale"[2] e così si esprime per definire i numeri irrazionali che rendono continuo il campo razionale: "Nel fatto che non tutte le sezioni sono prodotte da numeri razionali consiste l'incompletezza o la discontinuità del campo R di tutti i numeri razionali. Orbene, ogni volta che é data una sezione (A_1, A_2) che non sia prodotta da nessun numero razionale, noi *creiamo* un nuovo numero, un numero *irrazionale* α, che noi consideriamo come completamente definito da questa sezione; noi diremo che il numero α corrisponde a

[1] [Dedekind 1872], pag. 135
[2] [Dedekind 1872], pag. 135

questa sezione e che esso la produce. Adesso dunque ad ogni sezione corrisponde uno ed un solo numero determinato, razionale o irrazionale, e noi considereremo come distinti due numeri, quando e solo quando essi corrispondono a due sezioni sostanzialmente distinte"[1].
È chiaro allora che per definire ogni numero reale è indispensabile riferirsi ad un'infinità di numeri razionali. Si potrebbe pensare che si tratti di un infinito potenziale, considerando il numero reale α come l'estremo superiore cui tendono i numeri razionali della classe A_1 o l'estremo inferiore della classe A_2; eppure basta poco per accorgersi che non è così. Tale affermazione infatti ha senso solo dopo che si è già costruito il numero reale α e dunque non può essere considerata essa stessa la sua definizione. Affermare l'esistenza del numero irrazionale α equivale ad asserire l'essere in atto della classe A_1 degli infiniti numeri razionali minori di α (o, analogamente, della classe A_2 degli infiniti numeri razionali maggiori di α).
Anche le altre definizioni di numero reale (Weierstrass definisce i reali mediante opportune serie di potenze di numeri razionali, Cantor e Méray indipendentemente come limiti di successioni convergenti di numeri razionali) implicano la considerazione dell'infinito attuale. Si può dunque concludere con le parole di Cantor[2]: "la definizione di un numero reale irrazionale è sempre basata su di un insieme infinito ben definito di razionali avente la prima potenza[3]; questo è il punto comune a tutte le definizioni; la loro differenza sta nel momento generativo secondo il quale l'insieme è associato al numero da esso stesso definito e nelle condizioni cui l'insieme deve soddisfare per convenire come base alla definizione esaminata"[4].

L'analisi non standard

L'infinito attuale dunque non viene del tutto eliminato dall'analisi classica, in quanto è ancora presente nella definizione stessa di numero reale. In realtà gli stessi infinitesimi, paradigma dell'infinito in atto, continuano ad essere utilizzati, soprattutto nei rami più

[1] [Dedekind 1872], pag. 138
[2] Cfr. [Cantor 1879 - 1884]
[3] Cioé su un insieme numerabile di razionali.
[4] [Cantor 1879 - 1884], articolo numero 5, paragrafo 9

applicativi dell'analisi, forse per il loro richiamo all'intuizione i cui vantaggi, agli effetti pratici, sorpassano di gran lunga i problemi creati dal fatto che non siano inseriti in una trattazione matematica rigorosa[1].

Questo rigore tanto atteso viene finalmente conquistato negli anni Sessanta ad opera di Abraham Robinson, fautore dell'analisi non-standard. Chiaramente non è possibile qui presentare in modo esauriente questa teoria; si cercherà di accennare però da un lato alle caratteristiche del nuovo sistema di numeri che essa utilizza, dall'altro al modo in cui Robinson ha stabilito l'esistenza di una tale struttura.

Una trattazione elementare: gli assiomi dei numeri iperreali

L'idea fondamentale è quella di costruire un insieme in cui vi siano i numeri reali dotati delle solite proprietà e contemporaneamente anche numeri infiniti ed infinitesimi (che siano gli uni i reciproci degli altri) in modo tale che vengano soddisfatte le leggi algebriche elementari dell'analisi classica. Ciò che si vuole ottenere è dunque un'estensione $^*\mathbb{R}$ (che si dirà insieme dei *numeri iperreali*) dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali tale che:

- ogni numero reale appartenga ad $^*\mathbb{R}$;
- in $^*\mathbb{R}$ vi siano numeri *infinitesimi*, ovvero esista $\varepsilon \in {^*\mathbb{R}}$ tale che per ogni numero reale positivo a si abbia $-a < \varepsilon < a$;
- in $^*\mathbb{R}$ vi siano numeri *infiniti* positivi e negativi, ovvero esista $b \in {^*\mathbb{R}}$ ed esista $c \in {^*\mathbb{R}}$ tali che per ogni numero reale a si abbia $c < a < b$.

Keisler[2], in *Elementary Calculus. An Approach Using Infinitesimals*, presenta una trattazione elementare dell'analisi non-standard costruendo l'insieme dei numeri iperreali attraverso l'introduzione del sistema di assiomi che viene qui riportato[3].

---

[1] Forse un po' semplicisticamente, ma comunque in modo aderente alla realtà anche attuale annota Hersh: "I matematici persistettero nell'uso degli infinitesimi [...] e con grande successo. E in realtà fisici ed ingegneri non hanno mai cessato di usarli. Nella matematica pura, d'altra parte si ebbe nel XIX secolo un ritorno al rigore euclideo, che raggiunse il culmine sotto la guida di Weierstass nel 1872. È interessante osservare che il XVIII secolo - che fu il grande momento degli infinitesimi - fu l'epoca in cui non si riconoscevano barriere tra matematica e fisica. I fisici di punta e i matematici di punta erano le stesse persone. Quando la matematica pura ricomparve come disciplina a sé stante, i matematici di nuovo si assicurarono che i fondamenti della loro attività non contenessero ovvie contraddizioni. L'analisi moderna rese saldi i suoi fondamenti facendo quello che già i Greci avevano fatto: bandendo gli infinitesimi". ([Davis - Hersh 1972], pag. 85)

[2] Cfr. [Keisler 1976]

[3] Cfr. [Keisler 1976], pagg. 2 - 68

ASSIOMI ALGEBRICI DEI NUMERI REALI:

LEGGI DI CHIUSURA	0 e 1 sono numeri reali. Se a e b sono numeri reali, allora anche $a+b$, ab e $-a$ sono numeri reali. Se a è un numero reale e $a\neq 0$, allora anche $1/a$ è un numero reale.
LEGGI COMMUTATIVE	Se a e b sono numeri reali, allora $a+b = b+a$ e $ab = ba$.
LEGGI ASSOCIATIVE	Se a, b e c sono numeri reali, allora $a+(b+c) = (a+b)+c$ e $a(bc) = (ab)c$.
LEGGI DI IDENTITÀ	Se a è un numero reale, allora $0+a = a$ e $1a = a$.
LEGGI DELL'INVERSO	Se a è un numero reale, allora $a+(-a) = 0$ e, se $a\neq 0$, $a(1/a) = 1$.
LEGGE DISTRIBUTIVA	Se a, b e c sono numeri reali, allora $a(b+c) = ab+ac$.

DEFINIZIONE:

Gli *interi positivi* sono i numeri reali 1, 2 = 1+1, 3 = 1+1+1, 4 = 1+1+1+1, e così via.

ASSIOMI ORDINALI PER I NUMERI REALI:

	$0<1$.
LEGGE TRANSITIVA	Se a, b e c sono numeri reali, allora se $a < b$ e $b < c$, allora $a < c$.
LEGGE DELLA TRICOTOMIA	Se a e b sono numeri reali, allora vale una sola delle relazioni $a < b$, $a = b$, $b < a$.
LEGGE DELLA SOMMA	Se a, b e c sono numeri reali, allora se $a < b$, allora $a+c < b+c$.
LEGGE DEL PRODOTTO	Se a, b e c sono numeri reali, allora se $a < b$ e $0 < c$, allora $ac < bc$.
ASSIOMA DELLA RADICE	Per ogni numero reale $a > 0$ ed ogni intero positivo n, c'è un numero reale $b > 0$, tale che $b^n = a$.

ASSIOMA ARCHIMEDEO:

Per ogni numero reale a c'è un intero positivo n tale che $a <$ n.

ASSIOMI ALGEBRICI PER I NUMERI IPERREALI:

Ogni numero reale è un iperreale. Se a e b sono numeri iperreali, lo sono pure $a+b$, ab, $a-b$.

Se a è un numero iperreale e $a\neq 0$, $1/a$ è un numero iperreale.

Le leggi commutative, le leggi associative, le leggi dell'identità, le leggi dell'inverso e la legge distributiva valgono per i numeri iperreali.

ASSIOMI ORDINALI PER I NUMERI IPERREALI:

La legge transitiva, la legge della tricotomia, la legge della somma, e la legge del prodotto valgono per i numeri iperreali.

Per ogni iperreale $a > 0$ ed ogni intero positivo n, c'è un numero iperreale $b > 0$ tale che $b^n = a$.

DEFINIZIONE:

Un numero iperreale b è detto essere: un *infinitesimo positivo* se b è positivo ma più piccolo di ogni reale positivo; un *infinitesimo negativo* se b è negativo ma più grande di ogni reale negativo; un *infinitesimo* se b è o un infinitesimo positivo, o un infinitesimo negativo o 0.

ASSIOMA DELL'INFINITESIMO:

Esiste un numero reale infinitesimo positivo.

DEFINIZIONE:

Un numero iperreale b è detto: *finito* se b è tra due numeri reali; *infinito positivo* se b è maggiore di ogni numero reale; *infinito negativo* se b è minore di ogni numero reale.

DEFINIZIONE:

Due numeri iperreali b e c sono detti *infinitamente vicini* tra loro, in simboli $b \approx c$, se la loro differenza b-c è infinitesima.

I numeri reali sono anche chiamati *numeri standard*, mentre gli iperreali che non sono reali sono chiamati *numeri non standard*.

ASSIOMA DELLA PARTE STANDARD:

Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad esattamente un numero reale.

DEFINIZIONE:

Sia b un iperreale finito. La *parte standard* di b, denotata da st(b), è il numero reale che è infinitamente vicino a b. I numeri iperreali infiniti non hanno parte standard.

DEFINIZIONE:

Una *funzione reale di una variabile* è un insieme f di coppie ordinate di numeri reali tale che per ogni numero reale a accade una delle due cose seguenti:

(i) c'è esattamente un numero reale b tale che la coppia ordinata (a, b) è elemento di f. In questo caso diciamo che $f(a)$ è definito e scriviamo $f(a) = b$. Il numero b è chiamato il valore di f in a;

(ii) non c'è alcun numero reale b tale che la coppia ordinata (a, b) sia un elemento di f. In questo caso diciamo che $f(a)$ non è definito.

DEFINIZIONE:

Una *funzione iperreale di una variabile* è un insieme F di coppie ordinate di numeri iperreali tali che per ogni numero iperreale a accade una delle due cose seguenti:

(i) c'è esattamente un numero iperreale b tale che la coppia ordinata (a, b) è elemento di F. In questo caso diciamo che $F(a)$ è definito e scriviamo $F(a) = b$. Il numero b è chiamato il valore di F in a;

(ii) non c'è alcun numero iperreale b tale che la coppia ordinata (a, b) sia un elemento di F. In questo caso diciamo che $F(a)$ non è definito.

ASSIOMA DELLA FUNZIONE:

Per ogni funzione reale f di una o più variabili, c'è una corrispondente funzione iperreale $^*f$ dello stesso numero di variabili, chiamata l'*estensione naturale* di f. Le estensioni naturali delle funzioni somma, prodotto, differenza e reciproco sono le funzioni iperreali date dagli assiomi algebrici per i numeri iperreali.

DEFINIZIONE:

Una *formula* è una equazione o una disequazione tra due termini. Un *sistema di formule* è un insieme finito di equazioni o disequazioni.

ASSIOMA DI SOLUZIONE:

Se due sistemi di formule hanno esattamente le stesse soluzioni reali, allora essi hanno esattamente le stesse soluzioni iperreali.

Terminano qui gli assiomi che individuano l'insieme $^*\mathbb{R}$. È chiaro che, per ottenere una immagine più accurata di questo insieme, occorrerebbe analizzare anche alcuni dei teoremi che su di esso, a partire dagli assiomi dati, si possono dimostrare. Ad ogni modo è abbastanza evidente la struttura di $^*\mathbb{R}$: in esso vi sono tutti i numeri reali; ogni numero reale a è circondato da numeri iperreali finiti non standard, ad esso infinitamente vicini, di cui a risulta essere la parte standard (si dice allora anche che questi iperreali appartengono tutti alla stessa *monade*); i numeri iperreali appartenenti alla monade dello 0 sono gli infinitesimi; due iperreali appartengono alla stessa monade se e solo se la loro differenza è infinitesima; quando la differenza di due iperreali è finita si dice invece che appartengono alla stessa *galassia*: tutti i reali standard appartengono alla stessa galassia, che è detta *galassia principale*; l'intero $^*\mathbb{R}$ contiene un inifinità più che numerabile di galassie. Un buon modo di rappresentare $^*\mathbb{R}$ è dunque il seguente:

(...galassia principale...)

$\longleftarrow$ infiniti negativi... ... finiti... ... infiniti positivi $\longrightarrow$

$-1/\varepsilon$	$-\varepsilon$ 0 ε	$10-\varepsilon$ 10 $10+\varepsilon$	$1/\varepsilon$
---------------------	-------------	------------------	---------------------
$(-1/\varepsilon)-1$ $(-1/\varepsilon)+1$	(monade di 0)	(monade di 10)	$(1/\varepsilon)-1$ $(1/\varepsilon)+1$
(...galassia di $-1/\varepsilon$...)			(...galassia di $1/\varepsilon$...)

Su queste basi si definiscono poi i concetti di derivazione, di continuità, di integrazione, ecc. Ad esempio, per quanto riguarda la derivata di una funzione reale, Keisler propone la seguente definizione[1]:

DEFINIZIONE:

Sia f una funzione reale e a un numero reale tale che $f(a)$ risulti definita. S si dice *pendenza* di f in a se

$$S = \mathrm{st}\left(\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right)$$

per ogni infinitesimo non nullo Δx. La *derivata* di f è la nuova funzione f' il cui valore in x è la pendenza di f in x quando la pendenza esiste. La derivata $f'(x)$ non è definita se la pendenza di f non esiste in x.

L'idea di Leibniz era stata quella di definire come derivata il rapporto tra due incrementi infinitesimi $\Delta f/\Delta x$: una lieve modificazione, cioè la distinzione tra tale rapporto e la sua parte standard, permette di eliminare le contraddizioni.

Fin qui si è presentata la struttura sulla quale si costruisce l'analisi non-standard. Ma se ci si fermasse a questo punto, sarebbe come aver semplicemente meglio formalizzato gli infinitesimi di Leibniz senza aver nulla aggiunto di sostanziale a riprova della loro esistenza. È proprio questo invece ciò che si accennerà nel prossimo paragrafo.

[1] Cfr. [Keisler 1976], pagg. 71 - 73

<u>La questione dell'esistenza dei numeri iperreali</u>

Ai tempi di Leibniz il problema dell'esistenza degli infinitesimi era, di fatto, "non troppo differente dal problema se gli atomi materiali esistessero o no"[1]: si riteneva infatti, più o meno esplicitamente, che gli enti matematici acquisissero diritto di esistenza in base al loro rappresentare oggetti concreti. La situazione della matematica odierna è alquanto mutata; per capire ciò basta pensare al rapporto tra i numeri reali e i numeri immaginari: nessuno oggi probabilmente sosterrebbe un maggiore carattere di esistenza per i primi e corrispettivamente un maggiore carattere di finzione per i secondi, mentre questa era la posizione normalmente accettata nell'Ottocento. Sarebbe sicuramente interessante analizzare che cosa oggi i matematici intendano nel dire "esiste", e probabilmente non si potrebbe trovare un unico approccio e un'unica soluzione a questo problema ontologico[2]. Sta di fatto però che ammettere l'esistenza di una determinata struttura significa oggi ammettere la non contraddittorietà degli assiomi che la governano. Ora, la non contraddittorietà di una teoria ha in realtà un carattere relativo, nel senso che essa si dimostra riconducendola alla non contraddittorietà di un'altra teoria attraverso un modello.

La questione dell'esistenza degli iperreali si traduce allora in quella dell'esistenza di un modello per questa struttura. Per la costruzione di un tale modello Robinson si basa su "un teorema dimostrato per la prima volta dal logico russo Anatolij Malcev e generalizzato in seguito da Leon A. Henkin, dell'Università della California a Berkeley"[3]:

TEOREMA DI COMPATTEZZA:

Sia Σ un insieme di enunciati. Se ogni sottinsieme finito Σ_f di Σ ammette un modello, allora anche Σ ha un modello.

Si consideri allora il seguente insieme (infinito) di enunciati:

$$\Sigma = \{\text{'x è un numero e } 0 < x < 1\text{';}$$
$$\text{'x è un numero e } 0 < x < 1/2\text{';}$$
$$\text{'x è un numero e } 0 < x < 1/3\text{';}$$

[1] [Davis - Hersh 1972], pag. 88

[2] Un esempio di come le diverse posizioni sul problema dell'ontologia degli enti di cui si occupa la matematica abbiano influenza anche sugli sviluppi più tecnici della materia (e, di conseguenza, la loro analisi risulti importante non solo per quei matematici dotati di particolare sensibilità filosofica) si trova nell'appendice B.

[3] [Davis - Hersh 1972], pag. 86

...

'x è un numero e $0 < x < 1/n$';

...}

È chiaro che ogni sottinsieme finto di Σ ammette (per esempio) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (standard) come modello. Infatti comunque preso

Σ_f = {'x è un numero e $0 < x < 1/n_1$';

'x è un numero e $0 < x < 1/n_2$';

'x è un numero e $0 < x < 1/n_3$';

...

'x è un numero e $0 < x < 1/n_f$'}

una delle proposizioni di Σ_f conterrà la frazione $1/n_m$ minore di tutte le altre e allora il numero reale $1/2n_m$ (per esempio) sarà un x che soddisfa tutte le proposizioni di Σ_f. Tuttavia l'intero Σ non può ammettere l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (standard) come modello, poiché, per quanto piccolo si scelga un numero reale δ, esiste sempre un numero intero positivo n abbastanza grande per cui si abbia $1/n < \delta$. $\mathbb{R}$ allora non è un modello di Σ, ma il TEOREMA DI COMPATTEZZA asserisce che Σ ammette comunque un modello $^*\mathbb{R}$. In tale modello esiste allora un x positivo e più piccolo di $1/n$ per qualunque intero positivo n; in altre parole esiste un infinitesimo attuale.