

### 3.1. Significato

A partire dagli anni '70 del nostro secolo si delinea, ad opera di Petr Vopenka e di altri studiosi della scuola di Praga, un modo nuovo di intendere l'infinito in matematica. La novità sta non solo nell'abbandono della dialettica tra atto e potenza, ma soprattutto nell'attribuzione all'idea di infinito di un significato diverso da quello di illimitato, che fino a quel momento era stato l'unico ad essere seriamente preso in considerazione dai matematici. Attorno a questi anni si riscopre infatti, e si fa diventare un concetto matematico, l'idea di indefinitezza, di vaghezza, di irraggiungibilità: infinito non è più ciò che di per sé non ha fine, ma ciò la cui fine l'uomo non vede o non riesce ad afferrare nella sua interezza. Scrive Vopenka<sup>1</sup>: "Our infinity is a phenomenon occurring when we observe large sets. It manifests itself as absence of an easy survey, as our inability to grasp the set in its totality"<sup>2</sup>.

L'ispirazione filosofica da cui sembra prendere il via il lavoro di Vopenka ricorda le posizioni di Kant (che rinuncia alla filosofia dogmatica perché va al di là della portata umana) e, come dichiara esplicitamente Vopenka, di Husserl (iniziatore del movimento fenomenologico, il cui imperativo è il ritorno alle cose stesse, al di là di ogni verbosità e convinzione priva di fondamento)<sup>3</sup>. Questo richiamo alla realtà, all'esperienza e ai limiti delle possibilità dell'uomo si legge negli stessi scritti di Vopenka; in *Mathematics in the Alternative Set Theory* egli così si esprime: "One possible way out of the crisis of contemporary mathematics may be through an attempt to reconstruct mathematics on a phenomenal basis. [...] We shall deal with the phenomenon of infinity in accordance with our experience, i.e., as a phenomenon involved in the observation of large, incomprehensible sets"<sup>4</sup>; e in *Alternative Set Theory all about* esplicita: "Contemporary infinite mathematics is based on the classical idea of infinity - so considering that we are concentrating mainly on the set theoretical approach to mathematics - on the classical idea of actually infinite sets. Nowadays however, the existence of such sets in the real world is, to say the least, dubious. Even if we conceded that such sets do exist in the real world, they

---

<sup>1</sup> [Vopenka 1979]

<sup>2</sup> [Vopenka 1979], pag. 35

<sup>3</sup> Cfr. [Marchini 1991], pag. 123 e [Marchini 1992], pag. 158

<sup>4</sup> [Vopenka 1979], pag. 10 e 11

are not those which infinite mathematics applies its result to. We apply the results of infinite mathematics to certain phenomena that accompany the appearances of large sets. By a 'large set' we understand here a set that is finite from the classical point of view but that is not located, as a whole and along with each of its elements, in front of the horizon currently limiting the view of the given set. Here we understand 'view' in much more than a visual sense, essentially as a grasping and holding of some field of phenomena. [...] If we are to be consistent, we have to acknowledge that in some form infinity is already present in large sets, not only beyond them. If infinity is applicable to certain phenomena which show themselves on large sets, then it has to be already present there in some form. If it was not there we could not apply it there, in other words, the situation in question would not admit a model within infinite mathematics. We shall call this form of infinity natural infinity".

Per capire che cosa si intenda per 'insiemi grandi e incomprensibili' e per 'infinito naturale', si danno ora alcuni esempi, alcuni dei quali originali dello stesso Vopenka, non formalizzati e riferiti più che altro ad esperienze psicologiche.

Il problema degli insiemi finiti, in senso classico, ma troppo 'grandi e incomprensibili' è chiarito dall'esperienza del contare. Chiunque veda un portapenne con una, due, tre matite riconosce immediatamente, con un solo colpo d'occhio, di avere davanti a sé una, due, tre matite, appunto. Quando le matite contenute nel portapenne diventano leggermente più numerose, per arrivare a dire quante esse siano, occorre avviare un processo di semplificazione, che può essere quello di estrarre le matite dal portapenne, organizzarle a gruppetti di tre e poi passare al conteggio immediato dei raggruppamenti così ottenuti. Ora, più la quantità delle matite aumenta, più difficile sarà afferrare il loro numero. Vi sono però dei casi in cui la difficoltà è praticamente insormontabile. Se invece delle matite in un portapenne si pensa alle pecore di un gregge, si capisce come il sistema dei raggruppamenti non funzioni più così bene: innanzitutto le pecore si possono muovere da un raggruppamento all'altro senza che l'osservatore se ne accorga, inoltre esse non sono (se non per il loro pastore) così facilmente distinguibili le une dalle altre. Altri problemi che si creano per il conteggio sono quelli legati all'errore (l'osservatore passa da  $n$  a  $n+2$  involontariamente) e alla memoria (l'osservatore ad un certo punto si scorda il numero cui

era arrivato). Se ne conclude che un gregge ‘grande’, pur essendo classicamente finito, presenta delle caratteristiche che lo distinguono nettamente dal gruppo di una, due, tre pecore<sup>1</sup>.

Un altro esempio ormai ben noto è quello del catalogo di una biblioteca. Si supponga di voler determinare il numero delle pubblicazioni presenti nella biblioteca della sede di Brescia dell'Università Cattolica del Sacro Cuore. È auspicabile che tale numero sia facilmente determinabile dal Catalogo Generale della biblioteca stessa. Se si dovesse però calcolare quanti sono i libri interessanti di tale biblioteca, le cose non sarebbero altrettanto semplici. Bisognerebbe innanzitutto determinare un metodo per distinguere i libri dagli altri generi di pubblicazioni presenti nella biblioteca e poi, con ancora maggiori difficoltà, un sistema per decidere quali sono i libri interessanti. Probabilmente tale criterio, per rispettare il significato comune dato alla parola “interessante”, dovrà prevedere che ci sia qualcuno che legge tutti i libri della biblioteca e divide quelli interessanti dagli altri; inoltre se si vorrà rendere oggettiva la selezione dovranno esserci più lettori, ciascuno dei quali dovrà leggere l'intero ammontare di libri presenti nella biblioteca. L'insieme di tutte le pubblicazioni allora è un insieme finito in senso classico che risponde a certi requisiti di determinatezza, i quali però mancano all'insieme dei libri interessanti, che pure ne costituisce una parte. Si capisce bene da questo esempio come il problema della grandezza e quello della vaghezza, pur essendo in qualche modo correlati, non coincidono affatto: vi sono insiemi grandi che risultano essere completamente determinati, al contrario di alcuni loro sottinsiemi più piccoli, ma più confusi<sup>2</sup>.

Di esempi analoghi a quello del numero di libri interessanti di una biblioteca se ne possono fare tanti: quanti sono i maglioni verdi prodotti in un anno in un certo stato? quanti sono i granelli di sabbia grigi che costituiscono una certa spiaggia?<sup>3</sup>.

Un ulteriore esempio di come insiemi classicamente finiti, purché abbastanza grandi, assumano caratteristiche tipiche degli insiemi infiniti è quello, per così dire, dell'Hotel di Vopenka. Si è riportata nel capitolo precedente l'immagine utilizzata da Hilbert per descrivere l'infinito in atto: quella di un albergo con infinite stanze e dunque tale da poter

---

<sup>1</sup> Cfr. [Marchini 1991], pag. 124

<sup>2</sup> Cfr. [Sochor 1989], pag. 45

<sup>3</sup> Cfr. [Marchini 1992], pag. 161

ospitare sempre un nuovo avventore, anche dopo aver raggiunto il tutto esaurito. Vopenka, forse con un po' di ironia, descrive un albergo per certi versi simile a questo, anche se dotato di un numero finito di stanze, per quanto grande, per esempio 1000. Se, ad albergo completo, arrivasse un nuovo cliente, anche in questo caso l'albergo potrebbe non perdersi d'animo e far accomodare l'ultimo arrivato nella camera numero 1, l'ospite di questa stanza nella numero 2 e così via. Dal momento che i vari clienti si spostano uno dopo l'altro nel tempo, il processo di risistemazione non sarà terminato prima del mattino seguente e per la notte tutti gli ospiti avranno avuto la loro camera<sup>1</sup>.

Vi sono dunque insiemi finiti che si comportano bene (l'insieme di una, due, o tre pecore, l'insieme di tutti i libri della biblioteca, l'insieme di tutti i maglioni prodotti in Italia nel 1997, ...) ed altri che, pur essendo comunque finiti da un punto di vista classico, sono talmente grandi o talmente confusi che tanto finiti in realtà non sembrano (un intero gregge di pecore, l'insieme dei libri interessanti della biblioteca, l'insieme dei maglioni verdi, l'albergo con 1000 camere, ...): è in queste collezioni che Vopenka riconosce una spia della presenza dell'infinito.

Gli esempi riportati in questo paragrafo hanno tutti connotati concreti, ma “basta cambiare di poco il registro degli esempi per trovare in ambito matematico casi in cui i fenomeni di indecidibilità, incompletezza, eccetera, forniscano esempi più tecnici di collezioni, egualmente ‘sfumate’”<sup>2</sup>. Alla descrizione di questi enti verrà dato spazio nei prossimi paragrafi. Dovrebbe a questo punto essere chiaro ciò che permette di distinguere il finito (alternativo) dall'infinito (alternativo), ossia la possibilità di “afferrare” con un *colpo d'occhio* intellettuale un ente e tutte le sue parti: quando essa è data, questo è finito, altrimenti è infinito<sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup> Cfr. [Vopenka 1979], pagg. 11 e 12

<sup>2</sup> [Marchini 1992], pag. 161

<sup>3</sup> Cfr. [Marchini 1992], pag. 161

## 3.2. Esempi

### 3.2.1. La teoria degli insiemi di Vopenka

L'idea elaborata da Vopenka e dalla sua scuola è stata quella di proporre una nuova teoria che potesse essere da fondamento alla matematica e che interpretasse il concetto di infinito nel senso, sopra chiarito, di infinito naturale. Il loro approccio è molto classico: anch'essi propongono (così come Cantor, Zermelo, Bernays, ...) "un'analisi dei concetti insiemistici e la ricostruzione della Matematica mediante tali concetti"<sup>1</sup>; essi inoltre esplicitamente adottano, come strumento dimostrativo, la logica classica.

Questa volontà di ricostruire una teoria assiomatica, che utilizza la logica per dedurre teoremi da postulati di partenza, non va contro la posizione fenomenologica di Vopenka, cui si accennava all'inizio del capitolo. Egli infatti concepisce la matematica come un mezzo che, costruito su basi concrete e il più lontano possibile da problemi artificiali, deve servire però per oltrepassare i limiti dell'evidenza e per esprimere quei pensieri che vanno al di là dell'immediata esperienza: "a purely phenomenal conception of mathematics would considerably impoverish mathematics; moreover, this impoverishment would affect the role of mathematics itself. Mathematics is a means for surpassing the horizon of human experience. We use mathematics to express thoughts preceding our knowledge and for which later evidence is often impossible to obtain. In reconstructing mathematics we are thus obliged to accept also basic principles for surpassing the horizon of evidence. In particular, we do not reject logic as a means of deduction from axiom"<sup>2</sup>.

Leggendo i testi di Vopenka, sicuramente colpisce il fatto che egli presenta una teoria in termini non rigorosamente formalizzati. Nel 1979 egli scrive: "Like Cantor set theory, our theory is a non-formalized 'naive' theory. Nevertheless, some of its important fragments can be axiomatized"<sup>3</sup>. Negli anni seguenti, proprio come era successo per la teoria cantoriana degli insiemi, vengono esibite formalizzazioni di parti significative della teoria<sup>4</sup>

---

<sup>1</sup> [Marchini 1992], pag. 157

<sup>2</sup> [Vopenka 1979], pag. 10

<sup>3</sup> [Vopenka 1979], pag. 12

<sup>4</sup> Cfr. A. Sochor, *Mathematics of the Alternative Set Theory I, II, III*, in *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 20 (1979) pagg. 697 - 722, 23 (1982) pagg. 55 - 79, 24 (1983) pagg. 137 - 154.

e formalizzazioni di tutta la teoria<sup>1</sup>, una delle quali verrà presentata in uno dei prossimi paragrafi<sup>2</sup>.

## I principi basilari della teoria alternativa degli insiemi

### Insiemi e classi

È un *insieme*, per Vopenka, ogni collezione di oggetti che può essere data per elencazione dei suoi elementi, cioè degli oggetti che le appartengono. Inoltre esiste un oggetto che è un insieme e che non ha elementi: l'*insieme vuoto*, che si indica con  $\emptyset$ .

Gli insiemi che si possono costruire attraverso un procedimento iterativo a partire da  $\emptyset$  sono detti insiemi dell'*universo degli insiemi*; essi bastano per costruire le strutture necessarie alla matematica. Si ha che:

1.  $\emptyset$  è un insieme dell'universo degli insiemi;
2. due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi;
3. se  $x$  e  $y$  sono due insiemi dell'universo degli insiemi, allora anche  $x \cup \{y\}$  è un insieme dell'universo degli insiemi;
4. tutti gli insiemi sono classicamente finiti.

Oltre agli insiemi vengono poi introdotte le classi. Per Vopenka ogni proprietà di oggetti può essere considerata come oggetto e una *classe* è proprio una proprietà di oggetti concepita come oggetto. Le classi possono essere immaginate dunque come la controparte formale dei processi di generalizzazione e di idealizzazione che ci permettono di considerare determinate collezioni la cui estensione non è descritta con precisione.

Le classi che costituiscono proprietà di insiemi dell'universo degli insiemi sono dette classi dell'*universo esteso*.

Esistono classi che non sono insiemi; esse sono dette *classi proprie* e rappresentano quelle collezioni che non possono essere colte come un tutt'uno. Collezioni di questo tipo sono

---

<sup>1</sup> Cfr. [Marchini 1989]

<sup>2</sup> Nel 1989 Vopenka presenta una nuova versione, riveduta e corretta, pubblicata per ora solamente in slovacco (P. Vopenka, Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín, Alfa, Bratislava, 1989) che egli dice non essere formalizzabile. Quest'affermazione non è in contrasto con l'esistenza delle formalizzazioni citate, in quanto si riferisce, appunto, alla nuova teoria e non a quella del 1979.

date da collezioni che o sono molto grandi (cioé nella loro costruzione non compaiono restrizioni alla continua aggiunta di elementi) o non sono descrivibili in modo preciso.

Tutti gli insiemi possono essere considerati come classi. Si chiama *semi-insieme* ogni sotto classe di un insieme e *semi-insieme proprio* ogni semi-insieme che non è un insieme.

### Finito ed infinito alternativi

La novità della teoria alternativa degli insiemi sta proprio nell'esistenza di semi-insiemi propri, cioè di insiemi che ammettono delle sottoclassi che non sono insiemi. Questi insiemi, pur essendo classicamente finiti, possono essere immaginati come inaccessibili, nel senso che non possono essere dominati in un solo colpo d'occhio assieme a tutte le loro parti.

L'introduzione di due concetti, quello di insieme e quello di classe, non è una novità: questa distinzione è presente anche in sistemi fondazionali classici, come NBG; ivi però "le classi sono gli oggetti 'troppo grandi' per essere ritenuti insiemi, in quanto se ad esse potessimo associare un numero cardinale, esso sarebbe maggiore del cardinale di ogni insieme"<sup>1</sup>. Le classi della teoria alternativa degli insiemi non sono solo quegli oggetti mal definiti perché troppo grandi, bensì anche quelli mal definiti perché inafferrabili, non dominabili. Di conseguenza, se nelle teorie classiche non possono esistere classi proprie contenute in un insieme, ciò è invece possibile nella teoria alternativa.

Non può non ritornare alla mente l'ottavo assioma di Euclide: il tutto è maggiore della parte. Nella teoria classica degli insiemi si stabilisce l'esistenza di insiemi equipotenti ad una loro parte propria, e questi sono gli insiemi classicamente infiniti; nella teoria alternativa esistono insiemi che contengono parti proprie confuse, che non sono insiemi, ma classi, e questi sono gli insiemi infiniti in senso alternativo.

### Il principio di prolungamento

Tra le classi infinite Vopenka definisce le *classi numerabili* come quelle classi infinite su cui è stabilito un ordine lineare tale che, per ogni elemento della classe, la sottoclasse di

<sup>1</sup> [Marchini 1991], pag. 125

tutti quelli che lo precedono è un insieme finito.

Legato alle classi numerabili è il cosiddetto *principio di prolungamento*, in base al quale se è data una classe  $F$  numerabile che è una funzione, allora esiste un insieme  $f$ , che è pure una funzione, che contiene  $F$ .

Per spiegare e motivare l'introduzione di questo principio, Vopenka utilizza la metafora della strada che si perde verso l'orizzonte<sup>1</sup>. Si immagina di trovarsi su una lunga strada rettilinea, sul ciglio della quale siano poste delle pietre miliari, a distanza regolare l'una dall'altra. Tali pietre siano numerate con numeri naturali in ordine crescente a partire dalla pietra numero 0 presso la quale si trova l'osservatore. La strada raggiunge l'orizzonte, e così le pietre miliari, ragion per cui non si riesce a distinguere nessuna pietra che possa dirsi l'ultima. La funzione che associa ogni pietra miliare al numero che la contrassegna è una classe numerabile (non è a priori un insieme, proprio per via del fatto che non si distingue l'ultima pietra miliare e che la percezione è interrotta all'orizzonte). È abbastanza naturale credere che anche oltre la linea dell'orizzonte la strada continui e così pure continuino le pietre, almeno per un tratto, e che poi ci sia una città dove la strada termina. Chiaramente questa è una ipotesi che non può essere verificata a meno di cambiare posizione o di incrementare notevolmente le proprie capacità visive (ad esempio usando un canocchiale). Tale ipotesi è formalizzata nel principio di prolungamento, che assicura che la collezione totale delle pietre miliari tra l'osservatore e la città è un insieme<sup>2</sup>.

Il principio di prolungamento, dunque, è la giustificazione formale di un atteggiamento filosofico di fondo che caratterizza le aspirazioni umane: "People have always tried to go beyond the horizon; this is a typical human aspiration. The aim is not merely to shift the horizon further away but to transcend it in the mind. Mathematics is one of the most important instruments for this; it formulates exact statements which transcend the frame work of perception"<sup>3</sup>.

In questi termini metaforici la questione può sembrare molto poetica, e lo è, ma non si possono non riconoscere dei risvolti anche molto pratici e indispensabili, per esempio, per

---

<sup>1</sup> In realtà l'idea di orizzonte è esplicitamente ripresa da Husserl: "the horizon is understood in the sense of E. Husserl's 'Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendente Phänomenologie'." ([Vopenka 1979], pag. 39)

<sup>2</sup> Cfr. [Vopenka 1979], pag. 41; [Sochor 1989], pag. 46; [Marchini 1992], pagg. 163 e 164

<sup>3</sup> [Vopenka 1979], pag. 41



lo sviluppo delle scienze naturali. Si pensi infatti, invece che alla collezione di tutte le pietre miliari della strada, a quella di tutti gli esperimenti di caduta dei gravi dei quali si può verificare che confermano la legge di Galileo: essa costituisce una classe numerabile, ma ciò che si fa in realtà è ipotizzare che tutte le cadute verificchino tale legge. Questo è ciò che sempre si fa quando si stabiliscono delle leggi della fisica o di qualunque altra scienza: “proiettiamo la ‘regolarità’ anche oltre all’orizzonte visibile, fidando nella *bontà* della natura [...], anche oltre l’orizzonte visibile, pur consapevoli che le nostre limitazioni intrinseche ci fanno cogliere distintamente solo ciò che sta al di qua dell’orizzonte stesso”<sup>1</sup>.

### *Infiniti diversi*

S’è detto che tra le classi infinite si riconoscono quelle numerabili. Si assume poi che tutte le classi infinite non numerabili siano tra loro equivalenti e che dunque esistano esattamente due cardinalità.

Vopenka dice esplicitamente di operare questa scelta, tra le tante possibili in termini di cardinalità infinite, perché non ci sono ragioni, se non su un piano puramente speculativo, per affermare l’esistenza di infiniti diversi: “At present, no reasons for the acceptance of a nontrivial theory of infinity are known. All such theories must be speculative in character. Consequently, their results mentioning infinite cardinalities will be vacuos if their speculative background is rejected. to prevent this, we decide to accept a trivial theory of infinite cardinalities”<sup>2</sup>.

### **Una formalizzazione della teoria alternativa degli insiemi: TAI**

Ora che si sono illustrati i concetti che stanno alla base della teoria alternativa degli insiemi, si procederà alla presentazione di una delle sue possibili formalizzazioni<sup>3</sup>. È opportuno sottolineare che la teoria cui ci si riferisce è quella elaborata a cavallo tra gli anni Settanta e gli anni Ottanta, mentre non si prendono in considerazione gli sviluppi più

---

<sup>1</sup> [Marchini 1992], pag. 164

<sup>2</sup> [Vopenka 1979], pag. 51 e 52

<sup>3</sup> Precisamente quella dovuta a Carlo Marchini, pubblicata in [Marchini 1989]. Una presentazione più estesa di tale formalizzazione si trova in [Marchini 1990].

recenti che hanno portato alla formulazione di nuovi concetti come quello di *oborim*, una sorta di classe potenziale<sup>1</sup>.

Una delle particolarità del sistema di assiomi qui presentato è il suo essere non-estensionale. La scelta di costruire una teoria di tal genere è stata fatta poiché, pur implicando sforzi non indifferenti, rispecchia l'idea di Vopenka per cui gli insiemi sono determinati dai loro elementi, ma le classi no: "Sets are specific objects. [...] A set is uniquely determined by its elements. Thus if  $X$  and  $Y$  are sets and have the same members, then  $X = Y$ . [...] Each property of objects can be considered as an object. A property of object understood as an object is said to be a class"<sup>2</sup>. Si vedrà nell'esposizione degli assiomi che per tutti gli insiemi (in particolare quelli dell'universo degli insiemi) vale l'assioma di estensionalità, mentre ciò non accade per tutte le classi, bensì solo per quelle dell'universo esteso.

Un'altra caratteristica di questa formalizzazione sta nel modo in cui tratta insiemi, insiemi dell'universo degli insiemi, classi, eccetera: vi è, infatti, un solo tipo di indeterminate e il problema di avere, nella teoria naive di Vopenka, oggetti di diverso genere è stato risolto introducendo diversi predicati ed evitando una stratificazione di tipi.

### Il linguaggio

Si adotta per TAI un linguaggio del primo ordine, il cui alfabeto è costituito da:

1. i connettivi ( $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  e  $\leftrightarrow$ ), i quantificatori ( $\forall$  e  $\exists$ ) e i simboli ausiliari ( $(, )$  e  $,$ ); tali simboli sono quelli comuni a tutti gli alfabeti di linguaggi del primo ordine senza identità;
2. una costante individuale che verrà indicata con  $\emptyset$ ;
3. tre predicati unari che verranno indicati con  $V$ ,  $Set$  e  $Cls$ ;
4. due predicati binari che verranno indicati con  $=$  e  $\in$ ;
5. un operatore  $\{...\dots\}$ , che vuole una indeterminata alla sinistra della barra e una formula alla sua destra (nella quale l'indeterminata abbia presenze libere) e che restituisce un termine (nel quale l'indeterminata che appare a sinistra risulta essere vincolata).

<sup>1</sup> Cfr. [Marchini 1992], pag. 158

<sup>2</sup> [Vopenka 1979], pagg. 17 e 27

Si considera un unico tipo di indeterminate, che si indicheranno con lettere maiuscole dell'alfabeto greco. Tali indeterminate intuitivamente stanno a rappresentare quelli che Vopenka chiama *oggetti*<sup>1</sup>.

I predicati binari  $=$  e  $\in$  verranno anche detti rispettivamente predicato di *uguaglianza* e di *appartenenza*. Come al solito si scriverà  $\Theta \neq \Phi$  e  $\Theta \notin \Xi$  per abbreviare rispettivamente le scritte  $\neg(\Theta = \Phi)$  e  $\neg(\Theta \in \Xi)$ .

Se  $\Theta \in \Xi$  si dirà che  $\Theta$  è un *elemento* di  $\Xi$  o che appartiene a  $\Xi$ .

L'operatore  $\{\dots|\dots\}$  è detto *operatore di astrazione*.

Se  $\text{Set}(\Theta)$ , allora si dirà che  $\Theta$  è un *insieme*; se  $\forall(\Phi)$ , allora si dirà che  $\Phi$  è un insieme dell'*universo degli insiemi*; se  $\text{Cls}(\Xi)$ , allora si dirà che  $\Xi$  è una *classe*.

### Assiomi per gli insiemi

Il sistema di assiomi di seguito proposto è sovrabbondante: si è preferito infatti seguire lo sviluppo della teoria alternativa degli insiemi così come è presentata da Vopenka, anche se questo ha voluto dire rinunciare alla minimalità<sup>2</sup>.

Il primo assioma stabilisce la proprietà riflessiva del predicato di uguaglianza per oggetti qualsiasi:

$$(A1) \quad \forall \Phi (\Phi = \Phi).$$

Il secondo assioma, che è l'analogo dell'assioma di estensionalità per gli insiemi, stabilisce che due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi:

$$(A2) \quad \forall \Phi \forall \Psi (\text{Set}(\Phi) \wedge \text{Set}(\Psi) \rightarrow ((\Phi = \Psi) \leftrightarrow (\forall \Theta (\Theta \in \Phi \leftrightarrow \Theta \in \Psi)))).$$

Si noti che in tale assioma non si fa alcuna richiesta sul tipo di elementi degli insiemi  $\Phi$  e  $\Psi$ , nel senso che  $\Theta$  è una indeterminata qualunque. Da esso inoltre deriva il fatto che, per gli insiemi, la relazione  $=$  è di equivalenza.

<sup>1</sup> "The mathematician creates objects and interrelates them. He does this in various ways, which we shall not attempt to describe in full generality. The objects and relations that form the subject of mathematical study exist in our minds. For various purposes mathematicians create complex worlds of such objects. Our study will be devoted to a particular world of mathematical objects" ([Vopenka 1979], pag. 15)

<sup>2</sup> La numerazione delle proposizioni di seguito elencate permette in realtà di distinguere tra assiomi (che verranno indicati con (A1), (A2), eccetera) e teoremi da essi dimostrabili (che verranno indicati con (P1), (P2), eccetera).

Il terzo assioma, analogo dell'assioma dell'insieme vuoto, stabilisce che  $\emptyset$  è un insieme dell'universo degli insiemi al quale non appartiene alcun elemento; per questo  $\emptyset$  verrà a volte chiamato *insieme vuoto*:

$$(A3) \quad V(\emptyset) \wedge \forall \Phi (\Phi \notin \emptyset).$$

Per questioni di brevità, si indicheranno con lettere minuscole dell'alfabeto latino variabili relativizzate al predicato  $V$ , ossia insiemi dell'universo degli insiemi.

Anche per gli insiemi dell'universo degli insiemi, vale l'analogo dell'assioma di estensionalità<sup>1</sup>:

$$(P1) \quad \forall x \forall y ((x = y) \leftrightarrow (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))).$$

A differenza di quanto avviene nell'assioma (A2), qui si vede come gli elementi  $z$ , degli insiemi dell'universo degli insiemi  $x$  e  $y$ , di cui (P1) parla siano anch'essi insiemi dell'universo degli insiemi. Da (P1) deriva il fatto che la relazione  $=$  sia di equivalenza anche per gli insiemi dell'universo degli insiemi.

Il cosiddetto assioma dei successori (insiemistici) permette di costruire vari insiemi dell'universo degli insiemi, che però non è detto che lo esauriscano tutto; la motivazione del nome di successore si chiarisce pensando alla teoria degli ordinali nel senso di Von Neumann<sup>2</sup>:

$$(P2) \quad \forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow ((u \in x) \vee (u = y))).$$

Dati comunque  $x$  e  $y$ , l'insieme  $z$  la cui esistenza è assicurata da (P2) è unico per (P1). Lo si denoterà allora con  $x \cup y$  e allora (P2) può essere riscritto in questo modo:

$$(P2') \quad \forall x \forall y \forall u ((u \in x \cup y) \leftrightarrow (u \in x \vee u = y)).$$

A questo punto si rende necessario distinguere, tra le tante formule che si possono dare nel linguaggio che è stato definito, quelle che vengono chiamate *set-formule*: esse sono quelle in cui compaiono esclusivamente lettere minuscole dell'alfabeto latino (cioè indeterminate relativizzate al predicato  $V$ ), la costante  $\emptyset$  e i predicati  $=$  e  $\in$ .

Si danno a questo punto i seguenti schemi di assiomi:

(A4) per ogni set-formula  $\varphi(x)$ :

$$(\varphi(\emptyset) \wedge (\forall x \forall y (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x \cup y)))) \rightarrow \forall x \varphi(x);$$

(A5) per ogni set-formula  $\varphi(x)$ :

<sup>1</sup> Senza la notazione appena introdotta il postulato di seguito enunciato dovrebbe essere così formulato:

$$\forall \Phi \forall \Psi (V(\Phi) \wedge V(\Psi) \rightarrow ((\Phi = \Psi) \leftrightarrow (\forall \Theta (V(\Theta) \rightarrow (\Theta \in \Phi \leftrightarrow \Theta \in \Psi)))).$$

<sup>2</sup> Alla fine del capitolo secondo, presentando il sistema ZF, si era fatto cenno alla controparte insiemistica dei numeri naturali, la cui esistenza è ivi assicurata dall'assioma dell'infinito.

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow (\exists x (\varphi(x) \wedge \forall y (y \in x \rightarrow \neg \varphi(y)))).$$

L'assioma (A4) richiama, chiaramente, l'assioma di induzione, ed è con questo stesso nome indicato da Vopenka. Esso è uno schema di assiomi nel senso che, sostituendo a  $\varphi$  le varie possibili set-formule si ottengono assiomi particolari diversi di volta in volta. Sembra che questo schema non sia sostituibile con un numero finito di istanze dello schema stesso. Quindi, molto probabilmente, la teoria non è finitamente assiomatizzabile<sup>1</sup>. Il significato intuitivo di questo schema è che se una formula  $\varphi(x)$  è induttiva (ovvero se  $\varphi(x)$  è una set-formula tale che vale  $\varphi(\emptyset)$  e per ogni coppia di insiemi  $x, y$  se vale  $\varphi(x)$  allora vale anche  $\varphi(x \cup y)$ ), allora essa è soddisfatta da ogni insieme. Questo assioma sta a significare che tutti gli insiemi (dell'universo degli insiemi) sono classicamente finiti<sup>2</sup>.

L'assioma (A5) è chiamato da Vopenka assioma di regolarità. In esso, supposta l'esistenza di un insieme per cui vale  $\varphi$ , si stabilisce l'esistenza di un insieme  $x$  per cui vale  $\varphi$  e tale che nessun suo elemento soddisfa  $\varphi$ : intuitivamente,  $x$  è il primo insieme dell'universo degli insiemi tale che  $\varphi(x)$ .

A questo punto si possono definire le usuali operazioni tra insiemi, ad esempio:

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \leftrightarrow \forall z (z \in x \rightarrow z \in y));$$

$$\forall x \forall y (x \subset y \leftrightarrow (x \subseteq y \wedge x \neq y));$$

$$\forall x \forall y \forall z ((z = x \cup y) \leftrightarrow \forall u (u \in z \leftrightarrow (u \in x \vee u \in y))).$$

### Assioma di astrazione e $\Lambda$ -classi

L'esistenza di classi è assicurata dal seguente schema di assiomi, detto schema di astrazione:

(A6) per ogni formula  $\varphi(\Phi)$ , eventualmente con parametri<sup>1</sup>:

$$\text{Cls}(\{\Phi | \varphi(\Phi)\}) \wedge \forall \Theta (\Theta \in \{\Phi | \varphi(\Phi)\} \rightarrow \varphi(\Theta)).$$

<sup>1</sup> Cfr. [Marchini 1986], pag. 13

<sup>2</sup> È chiaro che bisognerebbe specificare la definizione di insieme finito. In [Marchini 1991] vengono presentate ed analizzate alcune delle definizioni classiche di finito; a pag. 112 viene riportata quella dovuta a Russell e Whitehead, per i quali un insieme è finito proprio se soddisfa ogni formula induttiva.

<sup>1</sup> Si utilizza questa espressione, qui e successivamente, per brevità. La forma estesa di (A6) sarebbe la seguente: per ogni formula  $\varphi(\Phi, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$

$$\text{Cls}(\{\Phi | \varphi(\Phi, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)\}) \wedge \forall \Theta (\Theta \in \{\Phi | \varphi(\Phi, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)\} \rightarrow \varphi(\Theta, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)).$$

In questo modo ogni formula determina una classe attraverso l'operatore di astrazione, ciascun elemento della quale verifica la formula di partenza. Si osservi che occorre evitare l'implicazione inversa di (A6), cioè non si può ammettere che si abbia in generale

$$\forall \Theta (\varphi(\Theta) \rightarrow \Theta \in \{\Phi | \varphi(\Phi)\}),$$

al fine di evitare il paradosso di Russell.

Una particolare rilevanza assumono quegli oggetti  $\Phi$  tali che:

$$\text{Cls}(\Phi) \wedge \forall \Psi (\Psi \in \Phi \rightarrow V(\Psi));$$

in tal caso si scriverà  $\Lambda(\Phi)$  e si dirà che  $\Phi$  è una classe dell'*universo esteso*.

Per questioni di brevità, si indicheranno con lettere maiuscole dell'alfabeto latino variabili relativizzate al predicato  $\Lambda$  appena definito, ossia classi dell'universo esteso. A questo punto si possono dimostrare le seguenti proprietà:

- per ogni formula  $\varphi(x)$ , eventualmente con parametri, si ha  $\Lambda(\{x | \varphi(x)\})$ ;
- indicando con  $V$  la classe  $\{\Phi | V(\Phi)\}$  si ha  $\Lambda(V)$ .

Gli insiemi, gli insiemi dell'universo degli insiemi e le classi dell'universo esteso sono strettamente connessi; l'assioma seguente, infatti, caratterizza gli insiemi dell'universo degli insiemi come tutti e soli quegli oggetti che sono insiemi e che fanno parte dell'universo esteso:

$$(A7) \quad \forall \Phi (V(\Phi) \leftrightarrow (\text{Set}(\Phi) \wedge \Lambda(\Phi))).$$

A questo punto si è sicuri del fatto che ogni insieme dell'universo degli insiemi è un insieme, cioè:

$$\forall \Phi (V(\Phi) \rightarrow \text{Set}(\Phi))$$

e dunque, in particolare,  $\text{Set}(\emptyset)$ .

Vi è poi un assioma che assicura del fatto che ogni insieme è una classe: ciò è confermato, a livello intuitivo, per Vopenka, dal fatto che ogni insieme  $\Phi$  può essere identificato con la proprietà "essere un elemento di  $\Phi$ "<sup>2</sup>:

$$(A8) \quad \forall \Phi (\text{Set}(\Phi) \rightarrow \text{Cls}(\Phi)).$$

Si dà poi un assioma di estensionalità per le classi dell'universo esteso:

$$(A9) \quad \forall X \forall Z ((X = Z) \leftrightarrow \forall x (x \in X \leftrightarrow x \in Z)).$$

Da (A9) deriva il fatto che la relazione  $=$  sia di equivalenza anche per le classi dell'universo esteso. Si è quindi visto che

<sup>2</sup> Cfr. [Vopenka 1979], pag. 28

- se  $\Phi$  e  $\Psi$  sono insiemi,  $\Phi = \Psi$  se e solo se hanno esattamente gli stessi elementi;
- se  $x$  e  $y$  sono insiemi dell'universo degli insiemi,  $x = y$  se e solo se tutti gli insiemi dell'universo degli insiemi che sono elementi di  $x$  lo sono anche di  $y$ , e viceversa;
- se  $X$  e  $Y$  sono classi dell'universo esteso,  $X = Y$  se e solo se tutti gli insiemi dell'universo degli insiemi che sono elementi di  $X$  lo sono anche di  $Y$ , e viceversa.

Invece l'assioma di estensionalità non vale per le classi che non siano classi dell'universo esteso.

### Tre assiomi alternativi

Fino a questo punto non si presentano grosse differenze tra le teorie classiche e la teoria alternativa degli insiemi (ad eccezione che per la restrizione dovuta all'assioma (A4) agli insiemi classicamente finiti). I prossimi tre assiomi sono invece realmente alternativi rispetto all'impostazione classica.

Prima di procedere si danno alcune notazioni utili per il seguito: la scrittura  $\Phi \subseteq \Psi$  significa che  $\forall y (y \in \Phi \rightarrow y \in \Psi)$ , mentre la scrittura  $\Phi \bar{\subseteq} \Psi$  significa che  $\forall \Theta (\Theta \in \Phi \rightarrow \Theta \in \Psi)$ . Si noti che la differenza tra le due notazioni dipende dagli oggetti a cui la quantificazione si riferisce: nel primo caso infatti la quantificazione è relativizzata al predicato  $V$ , cioè a insiemi dell'universo degli insiemi, mentre nel secondo caso è generalizzata.

### *Esistenza di semi-insiemi propri*

Nella TAI esistono classi (dell'universo esteso), che sono contenute in insiemi (dell'universo degli insiemi) pur non essendo esse stesse insiemi, ovvero:

$$(P3) \quad \exists X \exists y (X \bar{\subseteq} y \wedge \neg V(X)).$$

Una classe contenuta in un insieme si dice *semi-insieme*; un semi-insieme che non è un insieme si dice *proprio*. In questi termini, allora, (P3) assicura l'esistenza di un semi-insieme proprio. Si noti, per inciso, che (P3) è una diretta conseguenza dell'assioma di prolungamento.

Questo, come si diceva, è il primo principio veramente alternativo: nelle teorie classiche infatti ogni classe che è contenuta in un insieme deve per forza essere un insieme, in

quanto una classe propria è sostanzialmente una collezione troppo grande per poter essere un insieme. “L’interpretazione di che cosa sia una classe, nella teoria alternativa, è sostanzialmente diversa: una classe è un ente definito in maniera ‘vaga’. Questa almeno è l’interpretazione che si può desumere dagli esempi presentati da Vopenka”<sup>1</sup>.

L’esistenza dei semi-insiemi permette di spiegare e risolvere il cosiddetto paradosso di Berry. L’idea è quella di considerare la collezione A dei numeri naturali che posson essere definiti con meno di 1000 parole della lingua italiana. Chiaramente A è finita, dunque  $\mathbb{N} \setminus A$  è una collezione non vuota e, per il principio del buon ordinamento, ammette minimo. Sia x tale numero. Allora  $x \in \mathbb{N} \setminus A$  e quindi non può essere definito con meno di 1000 parole, cosa in contraddizione col fatto che x risulta ben determinato dall’essere “il minimo numero naturale non definibile con meno di 1000 parole della lingua italiana”, definizione che ha solo 14 parole! La soluzione che si dà nella teoria alternativa degli insiemi a questo paradosso è la seguente: la collezione  $\mathbb{N} \setminus A$  è una classe propria contenuta nell’insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali, quindi ad essa non è applicabile il principio del buon ordinamento, che afferma che ogni sottoinsieme (non ogni sottoclasse) dei numeri naturali ha minimo.

La definizione di semi-insieme è indispensabile, nella trattazione di Vopenka, per fornire la definizione di classe finita e di classe infinita (in senso alternativo, ovviamente).

DEFINIZIONE:

Una classe X (dell’universo esteso) è detta *finita* se

$$\forall Y (\forall z (z \in Y \rightarrow z \in X) \rightarrow \text{Set}(Y))$$

ovvero se ogni sua sottoclasse è un insieme. In tal caso si scriverà  $\text{Fin}(X)$ . Le classi non finite sono dette *infinite*.

TEOREMA:

Se X è una classe (dell’universo esteso) finita, allora  $\text{Set}(X)$ . Inoltre esistono insiemi infiniti.

DIMOSTRAZIONE:

Sia X una classe (dell’universo esteso); allora  $\forall z (z \in X \rightarrow z \in X)$ . Dunque, se X è finita si ha, dalla definizione,  $\text{Set}(X)$ .

---

<sup>1</sup> [Marchini 1986], pag. 62



L'esistenza di semi-insiemi propri, assicurata da (P11), implica l'esistenza di insiemi infiniti. ■

### *L'assioma di prolungamento*

Per poter introdurre la formalizzazione del principio di prolungamento occorre fornire alcune definizioni preliminari.

Siano  $X$  e  $Y$  due classi. In base ad (A6) si ha  $\text{Cls}(\{Z \mid Z = X\})$  e  $\text{Cls}(\{Z \mid Z = X \vee Z = Y\})$ . Indicheremo la classe  $\{Z \mid Z = X\}$  con  $\{X\}$  e la classe  $\{Z \mid Z = X \vee Z = Y\}$  con  $\{X, Y\}$ . Si pone poi  $\langle X, Y \rangle = \{\{X\}, \{X, Y\}\}$ , classe che è detta *coppia ordinata* di  $X$  e  $Y$ .

DEFINIZIONE:

Una coppia ordinata di classi  $\langle A, R \rangle$  è detta un *ordinamento di tipo  $\omega$*  se:

1.  $R$  ordina linearmente  $A$ , ovvero:

$R$  è una relazione su  $A$ , cioè

$$\forall y (y \in R \rightarrow \exists x \exists z (x \in A \wedge z \in A \wedge y = \langle x, z \rangle)),$$

$R$  è riflessiva, cioè

$$\forall x (x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R),$$

$R$  è antisimmetrica, cioè

$$\forall x \forall y ((x \in A \wedge y \in A) \rightarrow ((\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R) \rightarrow (x = y))),$$

$R$  è transitiva, cioè

$$\forall x \forall y \forall z ((x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A) \rightarrow ((\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R) \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)),$$

ogni coppia di elementi di  $A$  è confrontabile tramite  $R$ , cioè

$$\forall x \forall y ((x \in A \wedge y \in A) \rightarrow (\langle x, y \rangle \in R \vee \langle y, x \rangle \in R));$$

2.  $A$  è una classe infinita;

3.  $\forall x (x \in A \rightarrow \text{Fin}(\{y \in A \mid \langle y, x \rangle \in R\}))$ .

DEFINIZIONE:

Una classe  $A$  è detta *numerabile* se e solo se esiste una classe  $R$  tale che  $\langle A, R \rangle$  è un ordinamento di tipo  $\omega$ ; si scriverà allora  $\text{Count}(A)$ . Una classe  $B$  è detta *non-numerabile* se e solo se non è finita e non è numerabile; si scriverà allora  $\text{Uncount}(B)$ .

DEFINIZIONE:

Si dice che una classe  $R$  (dell'universo esteso) è una *relazione*, e si scrive  $\text{Rel}(R)$ , se tutti i suoi elementi sono coppie ordinate di insiemi (dell'universo degli insiemi).

Si indica con  $\text{dom}(R)$  e con  $\text{rng}(R)$  rispettivamente la classe  $\{u \mid \exists v (\langle v, u \rangle \in R)\}$  e la classe  $\{u \mid \exists v (\langle u, v \rangle \in R)\}$ .

DEFINIZIONE:

Si dice che una classe  $F$  è una *funzione*, e si scrive  $\text{Fnc}(F)$ , se è una relazione e se

$$\forall u \forall v \forall w ((\langle u, v \rangle \in F \wedge \langle w, v \rangle \in F) \rightarrow (u = w)).$$

Se  $F$  è una funzione si indica con  $F^{-1}$  la classe  $\{\langle u, v \rangle \mid \langle v, u \rangle \in F\}$ .

A questo punto si può formalizzare il principio del prolungamento attraverso il seguente assioma:

$$(A10) \quad \forall F ((\text{Fnc}(F) \wedge \text{Count}(F)) \rightarrow \exists f (\text{Fnc}(f) \wedge F \subseteq f)).$$

Dunque per ogni classe (dell'universo esteso) che sia una funzione numerabile esiste un insieme (dell'universo degli insiemi) che la contiene e che è pure una funzione.

### *Esistenza di due cardinalità*

Per dare il prossimo assioma c'è bisogno di introdurre la nozione di equivalenza tra classi.

DEFINIZIONE:

Se  $F$  è una funzione,  $\text{dom}(F) = X$ ,  $\text{rng}(F) = Y$  e  $F^{-1}$  è anch'essa una funzione, si dice che  $F$  è una *biezione* da  $X$  in  $Y$ .

DEFINIZIONE:

Siano  $X$  e  $Y$  due classi (dell'universo esteso). Si dice che  $X$  e  $Y$  sono *equivalenti* e si scrive  $X \approx Y$  se esiste una biezione da  $X$  in  $Y$ .

DEFINIZIONE:

Una coppia ordinata di classi  $\langle A, R \rangle$  è detta un *ordinamento di tipo  $\Omega$*  se:

1.  $R$  è un buon ordine su  $A$ , ovvero  $R$  ordina linearmente  $A$  ed inoltre ogni sottoclasse non vuota di  $A$  ammette minimo, cioè

$$\forall Z ((Z \neq \emptyset \wedge Z \subseteq A) \rightarrow \exists x (x \in Z \wedge \forall y (y \in Z \rightarrow \langle x, y \rangle \in R)));$$

2.  $A$  è una classe non-numerabile;

3.  $\forall x (x \in A \rightarrow (\text{Fin}(\{y \in A \mid \langle y, x \rangle \in R\}) \vee \text{Count}(\{y \in A \mid \langle y, x \rangle \in R\})))$ .

A questo punto l'assioma delle due cardinalità può così essere espresso:

(A11)  $\forall X \forall Z ((\text{Uncount}(X) \wedge \text{Uncount}(Z)) \rightarrow (X \approx Z)).$

In particolare, inoltre, si ottiene che:

TEOREMA:

Sia  $X$  una classe tale che  $\text{Uncount}(X)$ ; allora esiste una classe  $R$  tale che  $\langle X, R \rangle$  è un ordinamento di tipo  $\Omega$ .

L'assioma delle due cardinalità "ha lo scopo di annullare tutta la gerarchia degli infiniti della tradizionale teoria cantoriana degli insiemi, perché afferma che per ogni classe  $A$  essa è finita, oppure è numerabile o di tipo  $\Omega$ . Vi sono quindi solo due tipi di infinito alternativo: il numerabile e il 'continuo'. Da notare che l'argomento utilizzato da Cantor per far nascere la gerarchia degli infiniti, che non ci può essere una biezione tra un insieme  $a$  e  $\mathcal{P}(a)$ , qui cade subito: data una classe numerabile,  $A$ , la classe  $\mathcal{P}(A)$  dei sottinsiemi di  $A$  è ancora numerabile. E questo non è sorprendente se si pensa che gli insiemi sono tutti finiti. Anche nella teoria classica degli insiemi, l'insieme dei sottinsiemi finiti di  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  è numerabile. Con la presenza di due soli infiniti, tutta la gerarchia degli  $\aleph$  collassa"<sup>1</sup>.

È a questo punto importante notare come l'esistenza di semi-insiemi propri espressa da (P11) si può riottenere come caso particolare dell'assioma di prolungamento<sup>2</sup>.

### Altri assiomi

Per poter proseguire nella costruzione della teoria alternativa degli insiemi, si rendono necessari alcuni altri assiomi. Il primo di essi semplicemente ci permette, dati un insieme  $\Phi$  e un oggetto  $\Psi$ , di considerare come insieme l'unione  $\Phi \cup \{\Psi\}$ :

(A12)  $\forall \Phi \forall \Psi (\text{Set}(\Phi) \rightarrow \exists \Sigma (\text{Set}(\Sigma) \wedge \forall \Theta (\Theta \in \Sigma \leftrightarrow (\Theta \in \Phi \vee \Theta = \Psi))))$

Si noti a questo punto che si può dimostrare che per ogni oggetto  $\Psi$ , la classe  $\{\Psi\}$  è un insieme, in quanto si ottiene da (A12) prendendo  $\Phi = \emptyset$ . Ma allora si dimostra anche che, per ogni oggetto  $\Phi$  e per ogni oggetto  $\Psi$ , la classe  $\{\Phi, \Psi\}$  è un insieme. Di conseguenza anche le coppie ordinate sono insiemi.

Un problema che si presenta a questo punto consiste nel fatto che l'uguaglianza di oggetti non assicura che a tali oggetti siano attribuibili gli stessi predicati. Ciò provoca

<sup>1</sup> [Marchini 1992], pag. 165

<sup>2</sup> Cfr. [Marchini 1992], pag. 163

conseguenze spiacevoli. Per esempio, si supponga che  $\Phi$ ,  $\Phi'$ ,  $\Psi$  e  $\Psi'$  siano oggetti tali che  $\Phi = \Phi'$  e  $\Psi = \Psi'$ , per i quali la relazione di uguaglianza sia una relazione di equivalenza (ossia insiemi, insiemi dell'universo degli insiemi e classi dell'universo esteso). Allora si ha  $\{\Phi\} = \{\Phi'\}$ ,  $\{\Psi\} = \{\Psi'\}$ ,  $\{\Phi, \Psi\} = \{\Phi', \Psi'\}$  e dunque anche  $\langle \Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi', \Psi' \rangle$ . Non vale però il viceversa, cioè non è detto che se  $\langle \Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi', \Psi' \rangle$ , allora  $\Phi = \Phi'$  e  $\Psi = \Psi'$ .

Vi sono allora tre assiomi che ci assicurano che se due oggetti sono uguali allora uno dei due è un insieme (rispettivamente una classe o una classe dell'universo esteso) se e solo se lo è anche l'altro:

$$(A13) \quad \forall \Phi \forall \Psi ((\Phi = \Psi) \rightarrow (\text{Set}(\Psi) \leftrightarrow \text{Set}(\Phi)))$$

$$(A14) \quad \forall \Phi \forall \Psi ((\Phi = \Psi) \rightarrow (\text{Cls}(\Psi) \leftrightarrow \text{Cls}(\Phi)))$$

$$(A15) \quad \forall \Phi \forall \Psi ((\Phi = \Psi) \rightarrow (\Lambda(\Psi) \leftrightarrow \Lambda(\Phi)))$$

TEOREMA:

$$\forall \Phi \forall \Phi' \forall \Psi \forall \Psi' ((\Phi = \Phi' \wedge \Psi = \Psi') \leftrightarrow (\langle \Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi', \Psi' \rangle)).$$

Vi sono poi due assiomi che permettono di stabilire l'appartenenza di determinati oggetti (che sono poi i più interessanti per gli sviluppi successivi della matematica a partire dalla TAI) ad una classe ottenuta per astrazione. Per semplicità si dà la seguente definizione:

DEFINIZIONE:

Si dice che  $\Phi$  è un *oggetto di Frege* e si scrive  $\mathfrak{I}(\Phi)$  se si ha

$$\forall (\Phi) \vee \Lambda(\Phi) \vee \exists X \exists Y (\Phi = \langle X, Y \rangle).$$

TEOREMA:

Si ha che:

$$\forall \Phi \forall \Psi ((\Phi = \Psi \wedge \mathfrak{I}(\Psi)) \rightarrow \mathfrak{I}(\Phi));$$

$$\forall \Phi \forall \Psi ((\Phi = \Psi \wedge \forall (\Psi)) \rightarrow \forall (\Phi));$$

$$\forall \Phi \forall \Psi ((\Phi = \Psi \wedge \mathfrak{I}(\Phi)) \rightarrow \Psi = \Phi);$$

$$\forall \Phi \forall \Psi \forall \Theta ((\Phi = \Psi \wedge \Psi = \Theta \wedge \mathfrak{I}(\Phi)) \rightarrow \Phi = \Theta).$$

Il nuovo assioma da introdurre ci assicura che per ogni oggetto di Frege vale, inoltre, il cosiddetto principio di Frege, ossia:

(A16) per ogni formula  $\varphi(\Phi)$ , eventualmente con parametri

$$\forall \Theta ((\varphi(\Theta) \wedge \mathfrak{I}(\Theta)) \rightarrow (\Theta \in \{\Phi \mid \varphi(\Phi)\}))$$

(A17) per ogni formula  $\varphi(\Phi)$ , eventualmente con parametri

$$\forall \Theta \forall \Psi (((\Theta = \Psi) \wedge \mathfrak{I}(\Theta) \wedge \Theta \in \{\Phi \mid \varphi(\Phi)\}) \rightarrow (\Psi \in \{\Phi \mid \varphi(\Phi)\}))$$

Questi ultimi due assiomi permettono di utilizzare gli oggetti di Frege in un modo molto simile a quello della pratica matematica. In particolare essi rendono possibile considerare relazioni e funzioni i cui elementi sono coppie ordinate di classi dell'universo degli insiemi.

### *Assioma di codifica estensionale*

Tra le varie classi si sono per ora prese in particolare considerazione quelle dell'universo esteso, nel senso che alcuni assiomi sono validi non per ogni oggetto  $\Phi$  tale che  $\text{Cls}(\Phi)$ , bensì solo per quelli tali che  $\Lambda(\Phi)$ . Nonostante questo, può essere utile, a volte, lavorare con classi al di fuori dell'universo esteso. In particolare ciò avviene quando si voglia considerare classi i cui elementi sono classi dell'universo esteso. L'idea di Vopenka è quella di trovare un modo per 'codificare' oggetti di questo tipo tramite classi dell'universo esteso e di assumere che, data una classe del tipo  $\{X \mid \varphi(X)\}$ , ad ogni oggetto  $X$  tale che  $\varphi(X)$  possa essere associato un insieme dell'universo degli insiemi come suo codice, di modo che l'intera classe possa essere codificata nell'universo esteso dalla classe di tutti i codici associati.

DEFINIZIONE:

Sia  $S$  una classe tale che  $\text{Rel}(S)$ ; sia  $Y$  una sottoclasse di  $\text{rng}(S)$ ; allora si indica con  $S[Y]$  la classe

$$\{u \mid \exists v (v \in Y \wedge \langle u, v \rangle \in S)\}.$$

DEFINIZIONE:

Siano  $K$  e  $S$  due classi tali che  $\text{Rel}(K)$  e  $\text{Rel}(S)$ ; si dice che  $\langle K, S \rangle$  è una *coppia di codificazione*.

Sia ora  $\varphi(X)$  una proprietà (una formula) di classi dell'universo esteso; si dice che una coppia di codificazione  $\langle K, S \rangle$  *codifica la classe*  $\{X \mid \varphi(X)\}$  se

$$\forall X (\varphi(X) \leftrightarrow \exists y (y \in K \wedge X = S[\{y\}])).$$

Si dice che la classe  $\{X \mid \varphi(X)\}$  è *codificabile* se esiste una coppia di codificazione che codifica tale classe.

DEFINIZIONE:

Una coppia di codificazione  $\langle K, S \rangle$  si dice *estensionale* se e solo se

$$\forall x \forall y ((x \in K \wedge y \in K) \rightarrow ((x \neq y) \rightarrow (S[\{x\}] \neq S[\{y\}])))$$

si dice poi che una classe  $\{X \mid \varphi(X)\}$  è *codificabile in modo estensionale* se esiste una coppia di codificazione estensionale che codifica tale classe.

Fatte queste definizioni Vopenka assume che ogni classe codificabile sia codificabile in modo estensionale. Nella formalizzazione di cui ci si è occupati fin ora, questo assunto viene invece ricavato da un altro assioma, che richiama l'assioma di scelta, per enunciare il quale c'è bisogno di alcune nozioni preliminari.

DEFINIZIONE:

Sia  $R$  una classe tale che  $\text{Rel}(R)$ ; si indicherà con  $\downarrow x$  la classe  $\{y \mid \langle y, x \rangle \in R\}$  e si indicherà con  $R^*$  la classe  $\{\Phi \mid \exists x (\Phi = \langle x, \downarrow x \rangle)\}$ .

TEOREMA:

Per ogni classe (dell'universo esteso)  $R$  tale che  $\text{Rel}(R)$ , la classe  $R^*$  è una funzione.

L'assioma che si introduce al posto di quello di codifica estensionale è allora il seguente assioma di scelta:

$$(A18) \quad \forall R ((\text{Rel}(R) \wedge \Lambda(R)) \rightarrow \\ \rightarrow \exists \Phi (\text{Cls}(\Phi) \wedge \text{Fnc}(\Phi) \wedge (\text{dom}(\Phi) = \text{dom}((R^*)^{-1})) \wedge (\Phi \bar{\subset} ((R^*)^{-1}))))$$

Come si diceva sopra, l'assunto di Vopenka che ogni classe codificabile sia estensionalmente codificabile viene, in questo contesto, dimostrato. Si ha cioè che:

TEOREMA:

Sia  $\varphi(X)$  una proprietà (una formula) di classi dell'universo esteso; siano  $K$  e  $R$  classi (dell'universo esteso) tali che  $\text{Rel}(R)$  e che  $\langle K, R \rangle$  sia una coppia di codificazione che codifica la classe  $\{X \mid \varphi(X)\}$ . Allora esiste una coppia di codificazione estensionale che codifica la classe  $\{X \mid \varphi(X)\}$ .

### Cenni su alcuni sviluppi della matematica dalla teoria alternativa degli insiemi

Nel suo testo del 1979 Vopenka esprime la propria intenzione di rimpiazzare la teoria cantoriana degli insiemi nel suo ruolo di fondamento della matematica: come ogni ente matematico può essere ricostruito come una struttura della teoria cantoriana degli insiemi, così dovrà essere ricostruito all'interno della teoria alternativa. Costruire una struttura

tradizionale nella teoria alternativa, significa determinare un modello canonico di tale struttura all'interno dell'universo esteso: ciò mostra che questo modello può essere 'identificato' con la struttura originale e che esso gode di tutte le importanti proprietà della struttura in questione<sup>1</sup>.

In questo paragrafo ci si occuperà di dare dei brevi cenni a come alcune strutture ed alcuni concetti vengono 'ridefiniti' a partire dalla teoria alternativa degli insiemi, rimandando ai testi in bibliografia per i dovuti approfondimenti<sup>2</sup>.

### I numeri naturali<sup>3</sup>

I numeri naturali in termini insiemistici si possono definire a partire dagli ordinali di Von Neumann: se si considerano insiemi cantoriani si dovrà richiedere anche la finitezza di tali ordinali, mentre se si considerano insiemi alternativi questa è assicurata dal fatto che tutti gli insiemi sono finiti.

Sia  $a$  un insieme; si dice che  $a$  è *transitivo* e si scrive  $\text{Tr}(a)$  se e solo se

$$\forall x (x \in a \rightarrow x \subseteq a);$$

si dice che  $a$  è *connesso per appartenenza* e si scrive  $\text{Conn}(a)$  se e solo se

$$\forall x \forall y ((x \in a \wedge y \in a) \rightarrow (x \in y \vee x = y \vee y \in x)).$$

In presenza dell'assioma di fondazione, gli *ordinali* in senso classico sono gli insiemi transitivi e connessi per appartenenza.

Ancora nella matematica classica, un modello insiemistico dei numeri naturali è dato, come si diceva, dagli ordinali finiti, ossia dall'insieme  $IN_{\text{class}} = \{a \mid N_{\text{class}}(a)\}$ , dove  $N_{\text{class}}(a)$  sta per

$$\text{Tr}(a) \wedge \text{Conn}(a) \wedge (a = \emptyset \vee \exists x (a = x \cup \{x\} \wedge (x = \emptyset \vee \exists y (x = y \cup \{y\}))).$$

In contesto alternativo, invece, si pone  $IN_{\text{alt}} = \{a \mid N_{\text{alt}}(a)\}$ , dove  $N_{\text{alt}}(a)$  sta per

$$\text{Tr}(a) \wedge \text{Conn}(a).$$

Sia per gli elementi di  $IN_{\text{class}}$  che per quelli di  $IN_{\text{alt}}$  si prova che valgono gli assiomi di Peano, qualora lo schema di induzione venga applicato a formule che parlano solo di

<sup>1</sup> Cfr. [Vopenka 1979], pag. 55

<sup>2</sup> Cfr. [Vopenka 1979], [Marchini 1986], AA. VV., Guide to alternative set theory, in Proceeding of the 1<sup>st</sup> Symposium 'Mathematics in the Alternative Set Theory' held in Stará Lesná on May 28 - June 4, 1989, pagg. 41 - 131

<sup>3</sup> Cfr. [Vopenka 1979], pagg. 57 - 63

insiemi: “It is easy to verify that the class  $IN_{alt}$  endowed with the operations of successor, sum, and product satisfies the axioms of first order Peano arithmetic. This shows that we have constructed the natural numbers inside the universe of sets in such a way that they can be identified with the classical natural numbers”<sup>1</sup>.

È importante considerare il fatto che  $IN_{alt}$  è una classe e non un insieme; ciò è dovuto al fatto che una volta individuata una relazione d'ordine lineare  $\leq$  su  $IN_{alt}$  che corrisponda a quella solita,  $IN_{alt}$  non ha massimo. Inoltre  $\leq$  non è un buon ordine di  $IN_{alt}$ , il che conferma quanto detto in precedenza a proposito del paradosso di Berry.

Fino ad ora si è tralasciata la richiesta di finitezza per gli ordinali; se si aggiunge tale condizione (ovviamente in senso alternativo, visto che tutti gli insiemi alternativi sono già finiti in senso classico) si ottiene la collezione

$$FIN = \{a \mid N_{alt}(a) \wedge Fin(a)\}.$$

Anche questa collezione è una classe propria; inoltre essa è modello degli assiomi di Peano, anche quando lo schema di induzione viene applicato a proprietà qualsiasi. Si chiameranno *numeri naturali* gli elementi di  $IN_{alt}$  e *numeri naturali finiti* gli elementi di  $FIN$ .

Si verifica che mentre  $Uncount(IN_{alt})$ , si ha  $Count(FIN)$ .

### I numeri interi, razionali e reali<sup>2</sup>

Dal momento che si sono distinti i numeri naturali dai numeri naturali finiti, si avranno anche due tipi di numeri interi e due tipi di numeri razionali.

L'idea di Vopenka per la costruzione degli interi è quella di prendere lo 0 come codice del segno meno, ponendo così per definizione:

$$ZZ_{alt} = IN_{alt} \cup \{<0, \alpha> \mid \alpha \in N_{alt} \wedge \alpha \neq 0\}$$

$$FZZ = FIN \cup \{<0, n> \mid n \in FIN \wedge n \neq 0\},$$

dove  $ZZ_{alt}$  è la classe dei *numeri interi* e  $FZZ$  quella dei *numeri interi finiti*.

Rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto i numeri interi e i numeri interi finiti costituiscono due domini integrali e il campo  $Q_{alt}$  dei *numeri razionali* è definito come

<sup>1</sup> [Vopenka 1979], pag. 60

<sup>2</sup> Cfr. [Vopenka 1979], pagg. 64 - 67



campo quoziente di  $\mathbb{Z}_{\text{alt}}$ , mentre il campo  $FQ_{\text{alt}}$  dei *numeri razionali finiti* come campo quoziente di  $FZZ$ .

Nel caso dei numeri razionali si può poi definire un'ulteriore classe che risulta essere di notevole interesse, quella dei *numeri razionali limitati*:

$$BQ = \{x \mid x \in Q_{\text{alt}} \wedge \exists n (n \in FIN \wedge (|x| < n))\}$$

con ovvio significato dei simboli.

Si ha che  $FQ_{\text{alt}} \subseteq BQ \subseteq Q_{\text{alt}}$ .

Si definisce poi la relazione  $\doteq$ , che si verifica essere una relazione di equivalenza, nel seguente modo:

DEFINIZIONE:

Siano  $x, y \in Q_{\text{alt}}$ . Si pone  $x \doteq y$  e si dice che  $x$  e  $y$  sono *infinitamente vicini* se e solo se si verifica una delle seguenti condizioni:

- i)  $|x-y| < 1/n, \forall n \in FIN$ , con  $n \neq 0$ ; oppure
- ii)  $n < x$  e  $n < y, \forall n \in FIN$ ; oppure
- iii)  $x < -n$  e  $y < -n, \forall n \in FIN$ .

TEOREMA:

Se  $x \in BQ$ ,  $y \in Q_{\text{alt}}$  e  $x \doteq y$  allora  $y \in BQ$ ;

se  $x, y \in BQ$ , allora  $x \doteq y$  se e solo se  $\forall n ((n \in FIN \wedge n \neq 0) \rightarrow |x-y| < 1/n)$ ;

se  $x, y \in FQ$ , allora  $x \doteq y$  se e solo se  $x = y$ .

Ora, si dice che due numeri razionali determinano lo stesso *numero reale* quando sono infinitamente vicini. Se si vogliono rappresentare i numeri reali attraverso qualche oggetto, lo si può fare identificandoli con gli elementi della classe  $BQ$  quozientata rispetto alla relazione  $\doteq$ .

### La continuità<sup>1</sup>

Scriva Vopenka: "One of the most important aims of mathematics is to master continuum phenomena. If we observe a set but are unable to identify (distinguish) its individual elements, because they lie beyond the horizon of our observational capability, we

<sup>1</sup> Cfr. [Vopenka 1979], pagg. 82 - 86 e [Marchini 1992], pagg. 167 e 168.

encounter a continuum phenomenon. Thus, for example, when we observe a heap of sand from a sufficient distance it appears to be continuous”<sup>1</sup>. L'esempio del mucchio di sabbia è particolarmente esplicativo: da lontano esso sembra una massa unica, nella quale non si riescono a distinguere parti diverse, che dunque definiremmo continua; man mano che ci si avvicina si incominceranno a vedere delle macchie di colore distinte, fino a che, quando si è molto vicini, si possono apprezzare i granelli di sabbia; se poi si utilizzano microscopi via via più potenti, in ogni granello si possono notare le molecole, in ogni molecola gli atomi, eccetera.

In quest'ottica il continuo non è altro che l'incapacità di distinguere, così come l'infinito è l'incapacità di cogliere con un colpo d'occhio un tutt'uno e le sue parti.

Si accennerà qui semplicemente a come questo concetto di indistinguibilità venga formalizzato. Si pensi ancora all'esempio del mucchio di sabbia: fissata una certa distanza e un certo strumento di indagine (la vista, o un microscopio, o un microscopio più raffinato, eccetera) ogni elemento è indistinguibile da se stesso e se un elemento  $x$  è indistinguibile da  $y$ , allora anche  $y$  è indistinguibile da  $x$ . Si può così dire che, fissato un certo livello, l'indistinguibilità è una relazione quasi di equivalenza, nel senso che è riflessiva e simmetrica, ma non è detto che sia transitiva. Infatti, se  $x$  è indistinguibile da  $y$  e  $y$  è indistinguibile da  $z$  (ad un certo livello), non è detto che  $x$  sia indistinguibile da  $z$ ; è chiaro però che basterà allontanarsi un poco o usare un microscopio più grossolano per ottenere che (nel nuovo livello) anche  $x$  e  $z$  sono indistinguibili. Si hanno così per ogni diverso livello diverse relazioni riflessive e simmetriche  $R_0, R_1, \dots, R_n, \dots$ , tali che  $R_0 \supseteq R_1 \supseteq \dots \supseteq R_n \supseteq \dots$  e che risultano essere anticipatamente transitive, ossia

$$\forall x \forall y \forall z ((\langle x, y \rangle \in R_{h+1} \wedge \langle y, z \rangle \in R_{h+1}) \rightarrow \langle x, z \rangle \in R_h).$$

La relazione di *indistinguibilità ideale* è quella che si ottiene dall'intersezione delle indistinguibilità a ciascun livello, ossia

$$R = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} R_h.$$

Tale relazione è riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi è una relazione di equivalenza.

Il fenomeno del continuo è dunque formalizzato dalla seguente situazione: sulla classe  $X$  considerata sono date un'infinità numerabile di relazioni riflessive, simmetriche e

<sup>1</sup> [Vopenka 1979], pag. 82

anticipatamente transitive, tali che, per ogni insieme infinito  $u$  contenuto nella classe, esistono due elementi  $x, y \in u$  con  $x \neq y$  e  $\langle x, y \rangle \in R$ , dove  $R$  è l'intersezione delle relazioni date ed è detta relazione di indistinguibilità ideale.

Un esempio tipico e matematicamente interessante è quello che fornisce la continuità dei numeri reali. La relazione  $\approx$  definita sui numeri razionali limitati può essere considerata come intersezione della famiglia numerabile di relazioni  $S_h$  definite ponendo

$$\langle x, y \rangle \in S_h \text{ se e soltanto se } |x - y| < 1/h;$$

è chiaro inoltre che esistono razionali limitati (non razionali finiti) diversi che però la relazione  $\approx$  non riesce a distinguere.

### 3.2.2. Altri esempi

Si presentano ora, in modo decisamente succinto, alcuni altri esempi dai quali emerge una visione dell'infinito come infinito naturale. I primi due sono dedicati a momenti del pensiero matematico in cui una tale concezione è implicita, mentre il terzo accenna ad una teoria che esplicitamente tratta l'infinito in questo modo.

#### La numerazione nella Grecia antica e Archimede

Il sistema di convenzioni attraverso il quale i Greci rappresentavano i numeri (ovvero i numeri interi positivi) era decisamente limitato: i numeri più piccoli venivano indicati con lettere dell'alfabeto greco alle quali si apponevano diversi indici, poi, quelli più grandi, con parole apposite. Il massimo numero per il quale i Greci avevano coniato un nome era la *miriade*, pari a 10000; tale nome però poteva anche significare un numero talmente grande da essere indeterminabile, in qualche modo dunque infinito.

Non si tratta di un infinito potenziale, nel senso che alla miriade non si poteva pensare di aggiungere alcunché, proprio perché non si poteva trovare un nome per il risultato che si sarebbe ottenuto; ma non si tratta neppure di un infinito attuale, innanzitutto poiché è ben nota l'avversione che i Greci avevano al pensiero di un infinito in atto, in secondo luogo poiché tale numero è attribuito a quantità sì molto grandi, ma pur sempre finite. La miriade è stata forse il primo modo di indicare l'infinito naturale: laddove vi sia un numero non determinabile perché troppo grande per avere un nome o perché il processo del contare fino a tale numero risulterebbe troppo complesso, si introduce l'infinito come inconoscibile.

Una risposta a tale problema sembra venire da Archimede, il quale nell'*Arenario* introduce un nuovo modo per indicare i numeri grandi, che permette di andare di gran lunga oltre le miriadi. In realtà la questione semplicemente si sposta, nel senso che, pur arrivando a numeri sorprendentemente grandi, anche il sistema di Archimede ha un massimo, oltre il quale, comunque, potrebbe starci solo l'infinito naturale.

Il problema si pone ad Archimede volendo calcolare quanti granelli di sabbia servirebbero per riempire l'universo, ovvero, secondo quanto allora si pensava, una sfera di raggio pari

alla distanza tra la terra e il cielo delle stelle fisse. Scrive Archimede: “Vi sono alcuni, o Gelone, i quali sostengono che il numero dei granelli di sabbia che esistono è infinito; e quando dico “granelli di sabbia” intendo indicare non soltanto la sabbia che è nei dintorni di Siracusa, e nel resto della Sicilia, ma anche tutta quella che si può trovare in una qualunque regione, sia essa abitata oppure disabitata. Vi sono altri i quali, pur non pensando che il numero dei granelli sia infinito, pensano tuttavia che non si possa rappresentare un numero grande a sufficienza per indicare il numero di tutti i granelli di sabbia. [...] Ma io invece cercherò di mostrarti, per mezzo di dimostrazioni matematiche che Tu potrai seguire, che i numeri che io ho rappresentato nella mia opera che ho inviato a Zeusippo, sono molto più grandi, non soltanto del numero dei granelli di sabbia che potrebbero riempire la Terra, ma addirittura del numero dei granelli di sabbia che potrebbero riempire tutto l’universo”<sup>1</sup>.

Per creare il suo nuovo sistema numerico, Archimede prende come base la miriade di miriadi  $M$  (ossia  $M = 10^8$ ), poi (senza usare l’elevamento a potenza) trova un nome per tutti i numeri fino a  $M^{(M^2)} = (10^8)^{(10^{16})} = 10^{(8 \cdot 10^{16})}$ . Per fare ciò, egli introduce per ogni coppia ordinata  $\langle k, j \rangle$  di numeri naturali positivi minori o uguali a  $M$  i numeri del  $k$ -esimo ordine e del  $j$ -esimo ciclo. I numeri naturali fino a 10000 sono i numeri di ordine 0 e di ciclo 0. Per costruire tutti gli altri basta considerare le regole seguenti: sia  $m(k, j)$  il massimo numero del  $k$ -esimo ordine e del  $j$ -esimo ciclo; allora

i)  $m(1, 1) = M$

ii)  $m(1, j+1) = M \cdot m(1, j)$

iii)  $m(k+1, 1) = m(k, M)$

iv)  $m(k+1, j+1) = M \cdot m(k+1, j)$ .

Il numero più grande raggiunto da Archimede è allora  $m(M, M)$ , ossia una miriade di miriadi di unità del miriademiriadesimo ordine del miriademiriadesimo ciclo!

In questo modo Archimede riesce ad esprimere il numero dei granelli di sabbia che potrebbero essere contenuti nell’universo, e in realtà può rappresentare numeri anche molto più grandi. Ma se ci si ponesse il problema di considerare l’universo intero (con tutte le problematiche connesse con la sua determinazione) oppure il numero di atomi invece che

<sup>1</sup> Cit. in [Manara - Lucchini 1976], pagg. 42 e 43

quello dei granellini di sabbia, la questione di non avere numeri abbastanza grandi si riproporrebbe. È in questo senso che sembra di poter riconoscere qui l'infinito naturale: si hanno certi strumenti (il sistema di numerazione greco) che permettono di vedere bene fino ad un certo limite (la miriade); tutto ciò che va oltre è molto confuso fino a che non si migliorano gli strumenti di osservazione (la numerazione di Archimede); allora si fa chiarezza su ciò che prima non si vedeva, ma se si spinge lo sguardo ancora più avanti ci si accorge che si è formato un nuovo orizzonte oltre il quale lo sguardo è escluso.

### L'assioma di scelta

Anche se in modo implicito, nell'assioma di scelta della teoria classica degli insiemi si può intravedere un tentativo di catturare l'infinito naturale.

Consideriamo la formulazione dell'ASSIOMA DI SCELTA data in ZF:

$$\forall z (\forall x (x \in z \rightarrow (x \neq \emptyset \wedge \forall y (y \in x \rightarrow x \cap y = \emptyset \vee x = y)))) \rightarrow \\ \rightarrow \exists u \forall x \exists v (x \in z \rightarrow u \cap x = \{v\}).$$

Essa ci dice che data una famiglia  $z$  di insiemi non vuoti e disgiunti esiste un insieme  $u$  che “estrae” un elemento da ciascuno di questi insiemi appartenenti alla famiglia  $z$ .

Ora, se la famiglia  $z$  fosse sempre finita e finiti fossero pure tutti gli  $x \in z$ , non ci sarebbe bisogno di tale assioma, perché l'insieme  $u$  di cui esso ci assicura l'esistenza sarebbe facilmente determinabile. Ad esempio, sia  $z = \{\{a, b, c\}, \{d, e, f, g\}, \{h, i\}\}$ ; allora basta prendere  $u = \{\{a\}, \{d\}, \{h\}\}$ . Il problema non si pone nemmeno quando  $z$  è una famiglia magari pure infinita, di insiemi infiniti, ma ben ordinati: in questo caso infatti si potrebbe prendere come  $u$  l'insieme dei singoletti contenenti ciascuno il più piccolo degli elementi degli insiemi di  $z$ . Il problema sorge quando  $z$  è una famiglia “confusa” di insiemi “confusi”, cioè quando non c'è un modo per distinguere bene, per chiamare per nome l'elemento da estrarre da ciascun  $x \in z$ .

L'assioma di scelta dunque diventa necessario per governare non tanto gli insiemi illimitati, quanto gli insiemi particolarmente disordinati, non ben delineati, molto somiglianti insomma alle classi della teoria alternativa degli insiemi.

## La teoria degli insiemi finiti

Anche se non vi è qui modo di trattarle con la dovuta attenzione e col dovuto approfondimento, non si può non accennare al fatto che vi sono anche teorie che esplicitamente intendono l'infinito in modo simile a quello di Vopenka.

In particolare si può far riferimento alla teoria degli insiemi finiti di Ruggero Ferro e Stefano Baratella<sup>1</sup>. In tale teoria si assiomatizza la negazione dell'assioma (classico) dell'infinito e si introduce una nozione di infinito diversa da quella cantoriana e simile a quella dell'infinito naturale. L'infinito diventa in essa un problema di memoria, sia per quanto riguarda la costruzione degli insiemi che quella dei numeri naturali. In questi termini gli autori propongono la giustificazione dell'esistenza di numeri naturali finiti e infiniti (così come, del resto, si ottengono nella teoria alternativa degli insiemi): "l'operazione di passaggio al successore, può essere ripetuta tante volte da non ricordare più quello che si è fatto. Così si otterrebbero i numeri naturali infiniti, quelli per i quali non si può ricordare come sono stati ottenuti, rispetto ai numeri naturali finiti, quelli per i quali si ricorda il modo come sono stati ottenuti"<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Una presentazione formale di tale teoria è data in Stefano Baratella e Ruggero Ferro, *Non Standard Regular Finite Set Theory*, in *Mathematical Logic Quarterly*, 41 (1995), pagg. 161 - 172

<sup>2</sup> Stefano Baratella e Ruggero Ferro, *Teorie degli insiemi finiti*, in *Epistemologia della matematica*, seminari 1989 - 1991, a cura di Francesco Speranza, progetto strategico del C.N.R., 1992, pagg. 147 - 157.