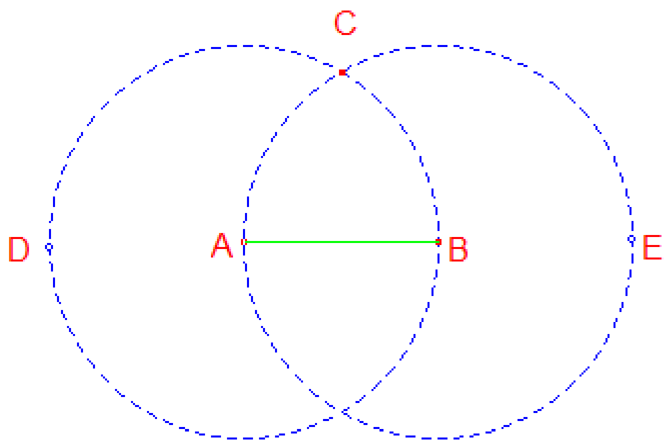
4.1. Criteri di confronto di teorie matematiche coinvolgenti l'infinito

4.1.1. La fedeltà della teoria ai presupposti

Un primo sistema per valutare una teoria matematica coinvolgente l'infinito è quello di considerare quanto essa si sviluppi in modo congruente con i presupposti da cui essa prende dichiaratamente le mosse. Il problema è cioè quello di verificare se, dopo aver preso posizione esplicita a favore di una determinata concezione dell'infinito, che sia quella potenziale, attuale o naturale, si faccia poi implicitamente ricorso ad un altro tipo di infinito o se si rimanga fedeli all'impostazione scelta inizialmente.
Per chiarire in che termini possa essere fatta una valutazione di questo tipo, si propongono di seguito due critiche (ed una possibile risposta a tali critiche) poste a due diverse teorie matematiche tra quelle riportate come esempi nei primi capitoli.

Gli Elementi di Euclide e la continuità

Nella prima proposizione del primo libro degli Elementi, Euclide fornisce la costruzione, con riga e compasso, di un triangolo equilatero di dato lato:
(pr. I.1) "Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero.



Sia AB la retta terminata data. Si deve dunque costruire sulla retta AB un triangolo equilatero. Con centro A e raggio AB risulti descritto il cerchio BCD, di nuovo risulti descritto, con centro B e raggio BA, il cerchio ACE, e dal punto C, in cui i cerchi si tagliano tra loro, risultino tracciate ai punti A, B le rette congiungenti CA, CB”[1].

Euclide non tralascia di dimostrare che il triangolo ABC così costruito sia equilatero; il problema sta a monte, cioè nel come egli determina il punto C. Infatti non si dimostra qui (né si è prima introdotto alcun principio da cui si possa dimostrare) che le due circonferenze prese in considerazione si intersecano in un punto. In realtà questa proposizione sottintende che se un arco di circonferenza ha un estremo interno e l’altro esterno ad una seconda circonferenza, l’arco taglia la seconda circonferenza in un punto. È questa una precisa intuizione di continuità, intuizione che è stata poi formalizzata in tempi moderni da espliciti postulati. Dedekind, ad esempio, scrive: “Se una ripartizione di tutti i punti della retta in due classi è di tale natura che ogni punto di una delle classi sta a sinistra di ogni punto dell’altra, allora esiste uno ed un solo punto dal quale questa ripartizione di tutti i punti in due classi, o questa decomposizione della retta in due parti, è prodotta. [...] La proprietà della retta espressa da questo principio non è che un assioma, ed è sotto forma di questo assioma che noi pensiamo la continuità nella retta”[2].

Il problema sta qui non tanto nel fatto che Euclide non abbia introdotto tutti i postulati necessari allo sviluppo della sua teoria, quanto nel fatto che sottintendere il postulato di continuità implica sottintendere l’infinito in atto. Ciò è dovuto al fatto che (se così si può dire) il massimo infinito pensabile in termini potenziali è il numerabile, mentre una retta continua ha cardinalità sicuramente più che numerabile.

Occorre però a questo punto verificare se, per le costruzioni fatte da Euclide (come quella del triangolo equilatero), ci sia davvero bisogno della continuità, o se basti una richiesta meno forte. La questione potrebbe essere così riformulata: per ammettere le costruzioni di Euclide, è necessario che i punti delle sue rette siano in corrispondenza biunivoca con i numeri reali (e quindi che queste siano continue)? In realtà le rette di Euclide possono avere moltissimi “buchi” rispetto alla retta reale: basta infatti che esse abbiano i punti corrispondenti ai numeri reali algebrici, ovvero quei numeri reali che sono radice di un polinomio a coefficienti interi, tra cui i razionali e quegli irrazionali che si possono esprimere mediante operazioni razionali e di estrazione di radice di qualsiasi indice. Tali punti infatti sono tutti e soli quelli ottenibili da costruzioni mediante riga e compasso, che

[1] [Euclide], pagg. 77 e 78

[2] [Dedekind 1872], pagg. 133 e 134. Quanto qui egli propone per le rette è facilmente trascrivibile per le altre curve, come la circonferenza.

sono le uniche considerate da Euclide. Ora, come dimostra Cantor, i numeri reali algebrici sono in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali, cioè sono un'infinità numerabile, quindi pensabile in termini di infinito potenziale. In questo modo la coerenza di Euclide con la concezione potenziale dell'infinito è recuperata.

Analisi classica, analisi intuizionista e analisi non-standard

Un'altra critica sull'utilizzo del solo infinito potenziale viene, a volte, fatta all'analisi classica, sostenendo che il presupposto abbandono dell'infinito attuale grazie al concetto di limite sia un falso abbandono. Si consideri, per esempio, il caso delle serie numeriche. È vero che si dice che

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S \quad \text{se} \quad \lim_{n}\left(\sum_{h=0}^{n} x_h\right) = S$$

passando così da una somma di infiniti termini ad un limite di somme finite, ma è pur vero che se un tale numero reale S esiste, allora esso racchiude in sé l'infinito in atto, mentre se non esiste allora il limite considerato non è definito. In altre parole: parlare di limiti significherebbe parlare di infinito esclusivamente in senso potenziale solo se non si considerasse mai come esistente il punto di convergenza dell'argomento del limite stesso. O meglio: l'infinito potenziale (per continuare nell'esempio di prima) sta nel considerare

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \sum_{h=0}^{n} x_h \, ,$$

ma quando si passa a considerare il valore cui convergono tali somme parziali, allora si ha a che fare innegabilmente con un infinito attuale.

Una possibile risposta a questa critica sta nell'osservare innanzitutto che la scrittura

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S$$

è solo una notazione e non presuppone che si consideri davvero come attuale la somma di infiniti termini, e ciò è dimostrato da come essa è definita. Potremmo dire che questa notazione è un retaggio di come si pensavano le serie prima di introdurre i limiti.

Ancor più chiaramente si coglie la reale portata potenziale del concetto di limite quando si parla di limiti di funzioni. Per esempio, quando si scrive che

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1$$

si intende far riferimento al metodo (potenziale) degli ε - δ, ossia si intende dire che

$$\forall \varepsilon \exists \delta \left(\left(|x - 0| < \varepsilon \right) \to \left(\left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right| < \delta \right) \right),$$

ma in nessun modo si attribuisce un valore alla funzione considerata in x=0. Abbandonare la concezione potenziale dell'infinito per quella attuale vorrebbe dire invece pensare la funzione come esistente e ben definita su tutti i numeri reali, 0 compreso, ponendo

$$\frac{\operatorname{sen} 0}{0} = 1.$$

Fintanto che ciò si evita, il metodo dei limiti rimane puramente potenziale.
Ciò che invece porta innegabilmente con sé nell'analisi l'infinito attuale sono i numeri reali, come si è già visto nel capitolo secondo. È chiaro allora che, indipendentemente dalla nozione di limite, l'infinito potenziale da solo non basta per costruire l'analisi classica.
Dal punto di vista della coerenza con i presupposti filosofici riguardanti l'infinito, potremmo quindi concludere che l'analisi intuizionista sceglie l'infinito potenziale e ad esso si mantiene fedele, la stessa cosa fa l'analisi non-standard con l'infinito attuale, mentre l'analisi classica da un lato si sforza di utilizzare solo l'infinito potenziale (quando si tratta di definire i limiti), dall'altro ha comunque bisogno dell'infinito attuale per definire i numeri reali.

4.1.2. La fecondità di risultati

Un altro sistema utile al confronto è quello che valuta i risultati ottenibili dall'una o dall'altra teoria coinvolgenti un particolare tipo di infinito. Una valutazione posta in questi termini si rifà al "principio" per il quale i matematici a volte valutano l'opportunità di scegliere un certo sistema di assiomi piuttosto che un altro in base alla loro creatività: secondo Gödel, ad esempio, si può decidere che sia il successo a misurare la verità di un assioma, e non una sua presunta intrinseca necessità[1].

A questo proposito vi sono almeno due gruppi di teorie, tra quelle considerate come esempi nei capitoli precedenti, che possono essere confrontate tra loro: da un lato le teorie fondazionali, dall'altro quelle, per così dire, ad uno stadio più avanzato.

Seguendo questa distinzione, si danno ora dei cenni a quali possano essere i criteri per valutare la fecondità di una teoria, senza però dar inizio al confronto né tanto meno al formulare giudizi in merito alla questione. Si noti, tra l'altro, che questi criteri non sono validi esclusivamente per quelle teorie che hanno a che fare con l'infinito, bensì in senso generale.

Criteri di confronto per teorie non fondazionali

Un esempio, tra quelli presentati nei capitoli precedenti, di teorie non fondazionali che possono essere tra loro confrontate in base ai risultati cui esse portano è dato dall'analisi classica, quella intuizionista e quella non-standard.

Un primo confronto tra teorie di questo tipo può essere basato sui teoremi dimostrabili in ciascuna di esse: occorrerà cioè controllare se in una di queste teorie si trovano teoremi "scomodi"[2], o viceversa teoremi fecondi di risultati interessanti.

Un altro tipo di confronto potrebbe essere svolto sul piano della didattica; ci si potrebbe cioè chiedere attraverso quale teoria gli studenti siano messi in grado di apprendere con maggior facilità concetti base dell'analisi, come quelli di continuità, di derivabilità, di

[1] Cfr. [Gödel 1947]

[2] Un esempio di teorema dalla maggior parte dei matematici considerato "scomodo" è quello che si dimostra nell'analisi intuizionista, in base al quale tutte le funzioni reali di variabile reale sono continue.

integrazione[1].

Infine potrebbe risultare interessante comparare tali teorie in base alle loro possibili applicazioni fuori della matematica, in base cioè alla maggiore o minore semplicità con cui attraverso di esse si possano costruire modelli dei processi fisici o di quelli sociali.

Criteri di confronto per teorie fondazionali

Tra gli esempi riportati nei primi capitoli, sono teorie fondazionali la teoria degli insiemi classica e quella alternativa, formalizzate la prima dai sistemi ZF e NBG e la seconda dal sistema TAI. Si tratta, come si è detto, di teorie che propongono un'analisi dei concetti insiemistici e la ricostruzione della matematica a partire da essi.

Un confronto tra queste teorie in termini di risultati può essere fatto considerando come esse presentano gli insiemi, ossia quali caratteristiche questi enti vengono ad assumere in ciascuna di esse.

Ancor più rilevante è però il modo con cui da queste teorie fondazionali si riescono a costruire le tradizionali strutture matematiche; occorre, in altre parole, valutare gli sforzi necessari per ritrovare, in tali teorie, dei modelli delle principali strutture numeriche, algebriche, eccetera.

[1] Una presentazione rigorosa dell'analisi non-standard a scopi didattici è data in [Keisler 1976]. Tale testo potrebbe essere la base di uno studio approfondito sull'efficacia didattica dell'analisi non-standard.

4.2. È possibile una scelta definitiva tra infinito attuale, potenziale e naturale?

4.2.1. Per una ontologia dell'infinito

Lo studio della logica insegna a distinguere, quando ci si avvicina ad una teoria matematica, diversi piani: quello grammaticale, quello sintattico e quello semantico.
Gli aspetti grammaticali di una teoria sono l'alfabeto del linguaggio in cui essa è espressa e le regole che, da esso, permettono di formare le proposizioni. Per semantica si intende poi assegnare un significato alle formalizzazioni realizzate con l'alfabeto del linguaggio, determinando un modello e l'interpretazione dei simboli dell'alfabeto in tale modello. La sintassi si occupa infine dell'introduzione delle regole di inferenza e della loro correttezza.
In quest'ottica non appare però un aspetto fondamentale, quello dell'ontologia della teoria, ossia del valore di esistenza che si ritiene attribuibile agli oggetti di cui la teoria stessa parla: credo invece che porsi questo problema sia indispensabile, quanto meno per una sorta di onestà intellettuale, e che in particolar modo ciò avvenga nel caso di teorie matematiche che coinvolgono l'infinito.

Infinito come puro simbolo

Un modo di risolvere la questione potrebbe essere quello di sostenere che il problema è mal posto e che l'infinito, per i matematici seri, non è altro che un simbolo, ben definito e facilmente utilizzabile, e che essi non devono farsi ingannare dai significati diversi che in altri contesti vengono dati a questa parola. Il valore ontologico dell'infinito sarebbe, così, praticamente nullo: esso non esiste che come parola e come simbolo. Vi sono alcuni casi in cui una affermazione di questo tipo risulta essere particolarmente adatta: si pensi, ad esempio, a che cosa si intende per punto all'infinito in geometria proiettiva, oppure nella compattificazione di Alexandroff dei numeri complessi, o ancora a come si possono introdurre in analisi $+\infty$ e $-\infty$. In ciascuno di questi tre casi si ha una determinata struttura e quando ad essa si aggiungono uno o due elementi ideali per poter riottenere determinate comode proprietà, tali punti vengono detti punti all'infinito: si tratta qui puramente di un modo di dire, facilmente sostituibile con altri senza alcuna perdita (ad esempio, in geometria proiettiva si parla, con lo stesso significato, di punti impropri). In questi casi l'infinito non ha nulla a che vedere con l'illimitatezza (il punto all'infinito è definito anche per le rette di piani proiettivi con un numero finito di punti; e così pure non si può dire che il punto all'infinito sia "più grande" o "più piccolo" di tutti gli altri punti: ciò potrebbe valere per esempio su $\mathbb{R}$, ma non si può dire nulla di simile per $\mathbb{C}$), né con l'inconoscibilità (in tutti e tre i casi il comportamento del punto all'infinito è regolato alla stessa stregua di quello degli altri punti).

Eppure, anche alla luce di quanto visto negli esempi riportati nei primi tre capitoli, si può ritenere che quelli appena presentati, ed altri eventualmente simili, siano casi molto particolari, che non costituiscono la norma cui riferirsi per determinare il valore di esistenza dell'infinito dei matematici.

Infinito come concetto pre-formale

Pur non volendo qui mettere in discussione il fatto che i simboli sono solo simboli e che essi esistono solo in quanto tali, cioè come segni su un foglio di carta, sembra importante pensare a cosa fa nascere l'esigenza di introdurre un certo simbolo, di chiamarlo in un certo modo, di far sì che obbedisca a certe condizioni. Quando una teoria matematica di qualsiasi genere è ormai completamente formalizzata ed ha raggiunto uno stadio avanzato, ci si può non preoccupare di altro che dei simboli e delle regole, stabilite dalla grammatica e dalla sintassi, per formare alcune proposizioni e dedurne altre da quelle scelte come assiomi. Ma rimane pur sempre la domanda: che cos'è che fa scegliere certi assiomi piuttosto che altri? che cos'è che rende ammissibili certe deduzioni e non ammissibili altre? da dove deriva il criterio con cui si operano queste scelte?

Si dice innanzitutto che gli assiomi di una teoria devono essere non contraddittori e, per questioni di semplicità e brevità, si cerca di adottare solitamente assiomi indipendenti. Sta di fatto poi che, come si è già accennato, un altro criterio di scelta è quello della "creatività" di tali assiomi: si hanno cioè in mente determinati risultati e si cercano quegli assiomi che permettano di ottenere, attraverso le regole di deduzione, determinati teoremi (si pensi, ad esempio, all'assioma di scelta). È vero che a volte si ottengono risultati imprevisti e sorprendenti, ma è altrettanto vero che, quando questi risultati piacciono poco, si cerca l'assioma dal quale deriva ciò che non funziona come si vorrebbe e lo si modifica allo scopo di rendere i teoremi ottenibili più consoni alle ragionevoli aspettative dei matematici.

C'è dunque un qualcosa che precede la rigorizzazione di una teoria, in base al quale vengono scelti gli assiomi e le regole di deduzione. Questa affermazione non vuole per forza avvallare la posizione un po' platoneggiante per la quale gli enti matematici esistono in quanto tali in un mondo tutto loro particolare, accessibile alla mente umana, il cui compito sarebbe dunque quello di scoprire gli oggetti matematici e le relazioni che tra essi intercorrono. Se anche si pensa, infatti, che la matematica sia una pura invenzione, non si può negare che i matematici non inventino tutto e il contrario di tutto, bensì operino delle scelte. Nemmeno si vuol qui sostenere una posizione totalmente empirista, che metta la matematica al pari delle scienze sperimentali.

L'idea è piuttosto che chiunque faccia il matematico sia, volente o nolente, un essere umano, che vive in un certo mondo e che è dotato di innumerevoli capacità, ma anche di qualche limite. Ogni matematico riesce a pensare solo ciò che è pensabile ed è in qualche modo influenzato (anche se mai costretto) da ciò che lo circonda e da ciò che egli percepisce come esistente. Ogni matematico ha delle conoscenze pre-formali, che gli derivano dall'esperienza che si è fatto del mondo sensibile, ma anche dalla riflessione sui propri desideri, sulla propria fantasia, sulle proprie proiezioni.

Tra queste conoscenze pre-formali ve ne sono alcune che vengono ritenute tali da poter essere indagate dalla matematica, magari prima su un piano ancora un po' naive e solo successivamente in modo completamente formale. Spesso quello che diventa argomento di studio della matematica è proprio ciò che per nessuna altra via si è riusciti ad affrontare: citando una felice espressione di Claudio Bernardi, si può dire che "la matematica nasca, almeno come esigenza epistemologica, dal tentativo di dominare, con metodi e strumenti opportuni, quello che sembra a priori non dominabile. L'infinito rientra a pieno titolo in questo quadro, perché l'infinito è il non verificabile per eccellenza"[1].

[1] [Bernardi 1990], pag. 93

Esiste dunque un concetto intuitivo di infinito, che nasce nella mente dell'uomo da esperienze legate non solo e non tanto alla sfera del sensibile e di ciò che è sperimentabile, bensì anche e soprattutto a quella filosofica, religiosa, in qualche modo trascendente. Vi sono infatti oggetti che possono suscitare un senso di infinità: i binari che vanno verso l'orizzonte, la distesa del mare, il cielo stellato, ma probabilmente nulla di concreto di cui si può dire che corrisponda esattamente al nostro concetto di infinito[1]; contemporaneamente vi è però anche l'esigenza dell'uomo di pensare a qualcosa che va oltre lo sperimentabile, la tensione verso ciò che è ignoto, il desiderio di superare ogni limite e controllare ogni cosa.

Si potrebbe concludere dunque sostenendo che prima di un simbolo, prima di una teoria formale dell'infinito, esiste un'idea, probabilmente vaga e mal definita, dell'infinito e che scopo della matematica è chiarire, approfondire e determinare questa idea, attraverso gli strumenti suoi tipici.

[1] Con questo non si vuol dire che nel mondo sensibile non esista alcunché di infinito, in altre parole non si vuole affermare la finitezza dell'universo, bensì constatare come (almeno allo stato attuale delle cose) l'uomo non possa sperimentare altro che il finito.

4.2.2. Per una epistemologia dell'infinito

Detto questo, rimane da capire in che rapporto le tre concezioni di infinito potenziale, attuale e naturale stiano con la nozione intuitiva di infinito. A ben guardare, queste tre concezioni non riguardano tanto l'infinito in sé, bensì il modo in cui l'uomo può porsi di fronte ad esso per comprenderlo; in altre parole esse non corrispondono tanto a tre diverse intuizioni dell'infinito, quanto a tre diversi modi per avvicinarlo: esse non propongono tre teorie distinte su cosa l'infinito sia, bensì su come esso possa essere conosciuto.

Si può intravedere l'infinito nella capacità dell'uomo di pensare un finito sempre più grande, oltre ogni limite, aumentando via via la propria conoscenza, senza che mai questo processo possa avere termine: è questa convinzione che porta il matematico a parlare dell'infinito come di infinito potenziale.

Si può intravedere l'infinito nella capacità dell'uomo di trovare modi per padroneggiare e maneggiare con destrezza l'illimitato, come qualcosa di completamente conoscibile al pari di ogni altra entità finita: è questa convinzione che porta il matematico a parlare dell'infinito come di infinito attuale.

Si può intravedere l'infinito nell'incapacità dell'uomo di cogliere con chiarezza ciò che si spinge verso l'orizzonte apparendo annebbiato e confuso e, allo stesso tempo, nel desiderio di superare tale incapacità: è questa convinzione che porta il matematico a parlare dell'infinito come di infinito naturale.

L'infinito potenziale, l'infinito attuale e l'infinito naturale allora costituiscono tre diversi modi di concepire la via dell'uomo verso l'infinito, tre diversi modi che la matematica può proporre per allargare le possibilità dell'uomo di comprendere l'incomprensibile, di fondare con certezza ciò che è mistero, di dominare ciò che non si può verificare in modo diretto.

In quest'ottica allora, pur essendo plausibile e a volte doveroso operare un confronto tra teorie matematiche diverse che interpretano il concetto di infinito, ci pare che una scelta definitiva per l'infinito attuale, o potenziale, o naturale non sia possibile.