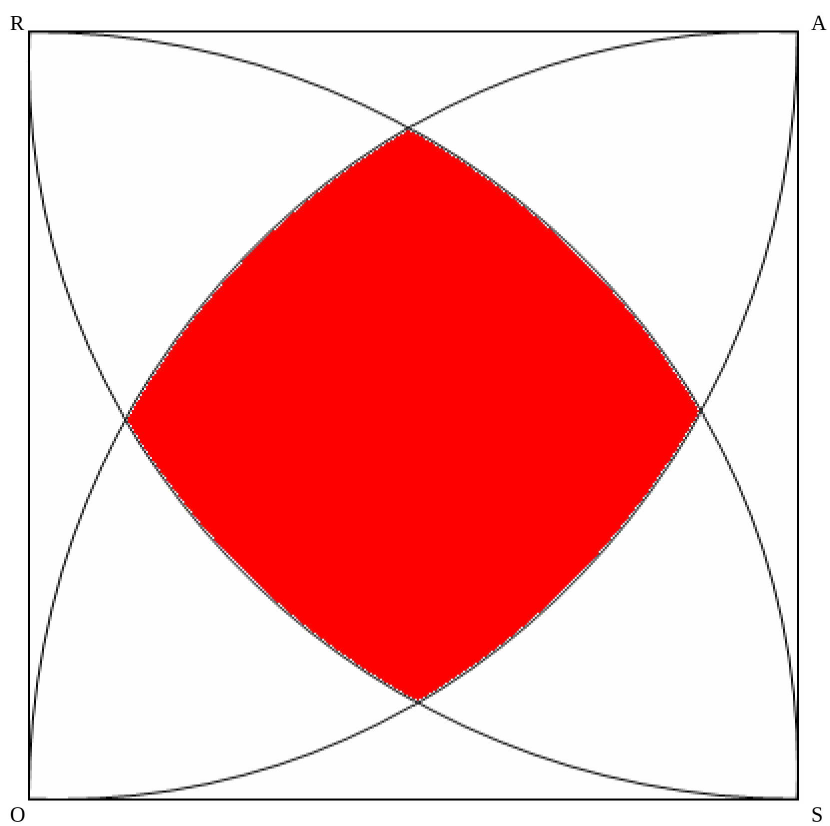
La Rosa della Mortalità

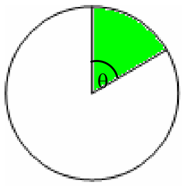
Tra gli antichi atzechi, un rituale alquanto strano era stato istituito per donare immortalità ai più meritevoli, agli eroi che avevano salvato il popolo da grandi minacce, a profondi pensatori o a grandi sacerdoti: il rituale della "Rosa della Mortalità".
Si dice che chi superasse la prova diventasse immune alla morte e ai pericoli ad essa connessi, mentre chi la falliva era destinato ad una vita mortale, e alla morte che tutti noi attende. In realtà, secondo alcuni studiosi, sembra che proprio chi risolvesse l'enigma della rosa fosse sacrificato, con procedimenti sconosciuti, agli dei, diventando così effettivamente immortale, mentre chi non era stato in grado di risolverlo veniva lasciato andare, con una rosa in mano, ritornando alla propria, mortale, vita.

La Rosa della Mortalità è una figura geometrica, non una rosa vera e propria.
Sia dato un quadrato di lato F (come Fiore; in realtà, mi sono stufato di chiamarlo "l": un po' di originalità, insomma!) e di vertici R O S e A (sempre per il precedente motivo dell'originalità, e per attinenza con l'enigma).
Come in ogni quadrato, ogni vertice ha due vertici contigui e uno opposto (nel caso di R, per esempio, O e A sono i contigui e S è l'opposto).
Da ogni vertice (R, O, S e A) traccio un arco di circonferenza che comincia da un vertice contiguo e finisce nell'altro. Quindi, ponendo il centro della circonferenza in R, comincio a tracciare un arco da O e lo finisco in A. Faccio questo procedimento per tutti e 4 i vertici. Quello che ottengo sembra effettivamente un fiore. Trovare l'area della figura al centro come funzione del lato F, colorata di rosso, come il sangue....

Diventerete immortali, o tornerete alla vostra vita mortale?



Prima di cominciare, vorrei ricordare una formula che userò in maniera ricorrente.



L'area del settore circolare verde (vedi figura adiacente) sottesa dall'angolo teta (espresso in radianti) è $\theta/2\ R^2$.
Detto questo, passiamo a risolvere il nostro problema.

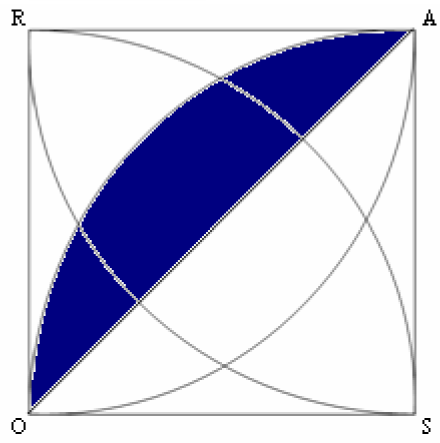


Fig. 1

Prima di tutto, cerchiamo l'area della parte in blu. Questa è uguale all'area del quarto di cerchio con centro in S e arco OA, meno l'area del triangolo OSA. Matematicamente:

$$A(Blu) = A(quarto\ di\ cerchio) - A\left(O\overset{\Delta}{S}A\right) = \frac{\pi}{4}F^2 - \frac{1}{2}F^2$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)F^2$$

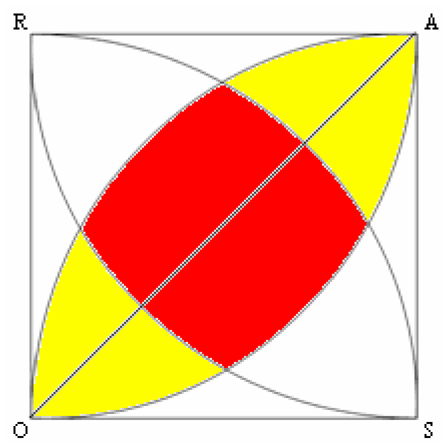


Fig. 2

E' evidente che la somma delle figure gialle e quella rossa in fig. 2 è uguale al doppio dell'area blu della figura sopra. Quindi:

$$A(Rossa + gialle) = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)F^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)F^2$$

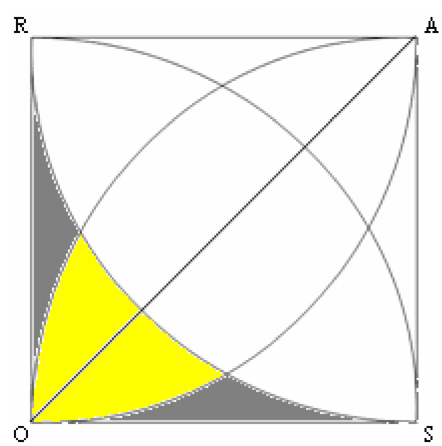


Fig. 3

Quindi, il trucco sta nel trovare l'area delle gialle, e sottrarla all'area del rossa+gialle.
Per fare questo, osservando la figura 3, si vede che basterebbe trovare l'area della figura grigie+gialle e sottrarre le figure grigie. Questa area è uguale all'area del quadrato ROSA meno quella del quarto di circonferenza con centro in A e arco RS. Quindi:

$$A(Grigie + gialla) = A(Quadrato) - A(Quarto\ di\ circonf.) =$$

$$F^2 - \frac{\pi}{4}F^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)F^2$$

Come troviamo l'area delle figure grigie? Usiamo un piccolo trucco. Raddoppiamo la Rosa e otteniamo la figura 4.

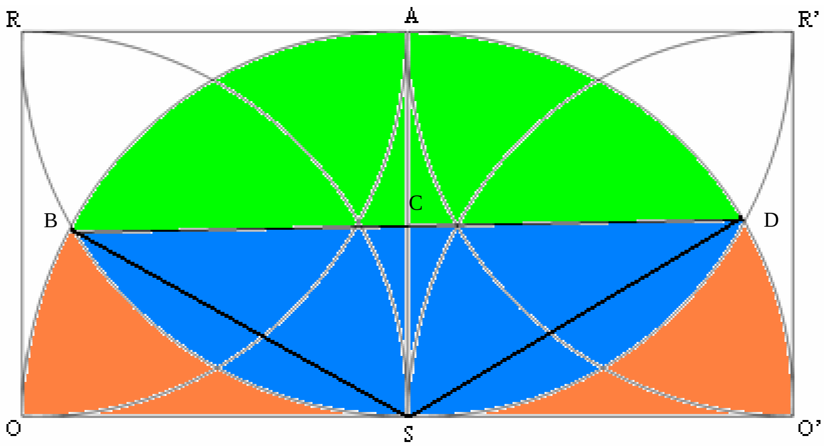


Fig. 4

Otteniamo un rettangolo ROO'R', di lato RO=R'O'=F e OO'=RR'=2F.
Se trovassimo l'area di una delle figure color "rosa pesca" (come la chiama la mia compagna di casa) e la sottraessimo all'area trovata in figura 3 (grigie+gialla), troveremmo l'area di una figura grigia (sempre secondo la figura 3).
Quindi, troviamo l'area della figura color rosa pesca. Notiamo dalla figura 4 che l'area della figura verde e quella blu sono uguali. Quant'è l'area della figura verde?

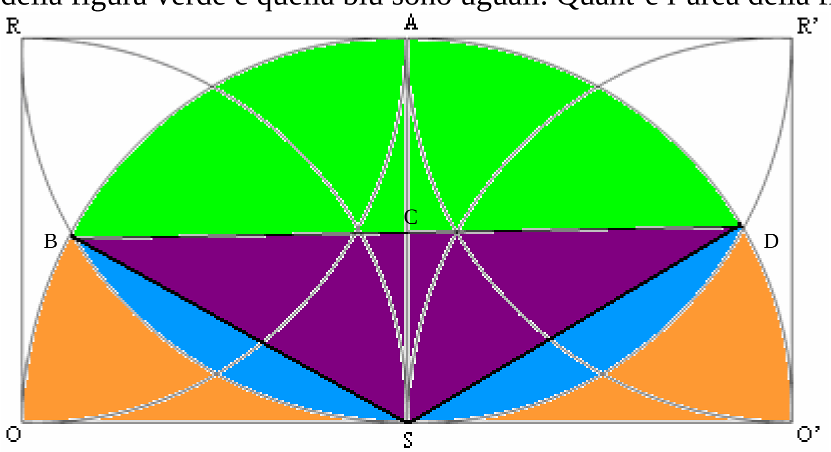


Fig. 5

Per trovarla, basta calcolare l'area del settore circolare BADS (viola+verde, fig. 5) e sottrarre l'area del triangolo BSD. Per trovare l'area del settore circolare, abbiamo bisogno dell'angolo BSD. Ma AC=CS (e quindi = F/2) per simmetria, e quindi $\cos\left(B\hat{S}C\right)=\frac{\overline{CS}}{\overline{BS}}=\frac{F/2}{F}=\frac{1}{2}$

Quindi, $B\hat{S}C=60°$ e $B\hat{S}D=120°$ (2π/3, in radianti). BC è, per regole trigonometriche, $\sqrt{3}/2$.

L'area della sezione circolare verde sarà quindi:

$$A(verde) = A(settore\ circolare) - A(triangolo\ viola) = \frac{\pi}{3}F^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{2}F^2 = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)F^2$$

Quindi, tornando alla figura 4, l'area di tutte e due le figure rosa pesca è:

$$A(rosa + rosa) = A(semicerchio) - 2 * A(verde) = \frac{\pi}{2}F^2 - 2 * \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)F^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)F^2$$

L'area di una sola figura rosa pesca (fig. 4), sarà quindi $A(rosa) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}\right)F^2$

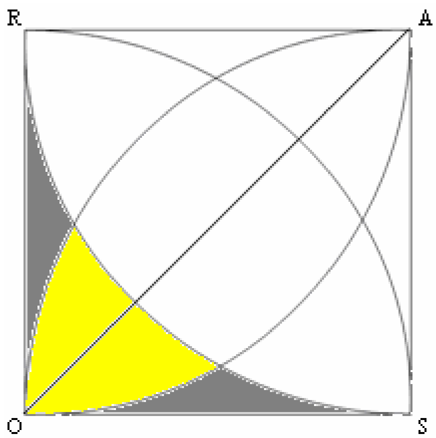


Fig. 6

La figura rosa è semplicemente la somma di una gialla e di una grigia in figura 5. Sottraendo all'Area (2 grigie+gialla) l'Area (1grigia+gialla = rosa), come si può ben vedere dalla fig. 6, ottengo l'area di una grigia.

Quindi:

$$A(grigia) = A(2\ \ grigie + gialle) - A(1\ \ grigia + gialle) =$$

$$\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)F^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}\right)F^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right)F^2$$

Dunque, l' area gialla vale:

$$A(gialla) = A(2\ \ grigie + gialla) - A(2\ \ grigie) = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)F^2 - 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right)F^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} - 1\right)F^2$$

Finalmente, togliendo dalla fig.2 le due aree gialle, ottengo la risposta cercata.

La soluzione è:

$$A(rossa) = A(rossa + gialle) - 2 * A(gialla) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)F^2 - \left(\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{6}\right)F^2 = \left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right)F^2$$